

Journal of Soft Computing and Information Technology (JSCIT)

Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

Journal Homepage: jscit.nit.ac.ir

Volume 11, Number 2, Summer 2022, pp. 1-12

Received: 03/01/2021, Revised: 04/07/2022, Accepted: 05/11/2022



Finding Hamiltonian Paths between Two Given Vertices in Even-sized T-shaped Grid Graphs

Reyhane Forghani-Tehrani, Fatemeh Keshavarz-Kohjerdi*

Department of Mathematics & Computer Science, Shahed University, Tehran, Iran.

reyhane.forghani@shahed.ac.ir, *f.keshavarz@shahed.ac.ir

Corresponding author's address: Fatemeh Keshavarz-Kohjerdi, Department of Mathematics & Computer Science, Shahed University, Tehran, Iran.

Abstract- One of the most popular problems in graph theory is the Hamiltonian path or cycle problem. This problem is NP-complete for general graphs and even some classes of graphs, including general grid graphs. In this paper, we study the problem of finding a Hamiltonian path between two given vertices s and t in even-sized T-shaped grid graphs, which is special case of grid graphs. This problem has many applications including in sweeping robots and in parallel processing. In this paper, first we give necessary conditions for the existence of Hamiltonian paths and cycles, then we present a linear-time algorithm for solving these problems.

Keywords- Grid graphs, T-shaped grid graphs, Hamiltonian path, Hamiltonian cycle, NP-complete.

پیدا کردن مسیرهای همیلتونی بین دو رأس معین در گراف‌های توری T-شکل با اندازه زوج

ریحانه فرقانی تهرانی، فاطمه کشاورز کوهجردی*

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران.

reyhane.forghani@shahed.ac.ir, *f.keshavarz@shahed.ac.ir

* نشانی نویسنده مسئول: فاطمه کشاورز کوهجردی، تهران، روبروی مرقد امام خمینی (ره)، دانشگاه شاهد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر.

چکیده - یکی از مسایل مشهور در نظریه گراف، مسأله مسیر یا دور همیلتونی است. این مسأله برای گراف‌های عمومی و حتی برخی از کلاس‌های گراف از جمله گراف‌های توری عمومی NP-کامل است. در این مقاله، مسأله پیدا کردن مسیر همیلتونی بین دو رأس معین S و t در گراف‌های توری T-شکل با اندازه زوج، که حالت خاصی از گراف‌های توری است، بررسی می‌شود. این مسأله کاربردهای مختلفی از جمله در ربات‌های جاروکننده و پردازش موازی دارد. در این مقاله، ابتدا شرایط لازم برای اینکه مسیر دور همیلتونی وجود داشته باشد بیان می‌شود، سپس یک الگوریتم زمان خطی بر حسب اندازه گراف برای حل مسأله مسیر و دور همیلتونی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گراف توری، گراف توری T-شکل، مسیر همیلتونی، دور همیلتونی، NP-کامل.

۱- مقدمه

گراف توری T-شکل یک گراف توری است که با حذف دو زیرگراف توری مستطیلی $Rl(k_1, l)$ و $Rr(k_2, l)$ از دو گوشه مجاور یک گراف توری مستطیلی $R(m, n)$ ، به طوری که $k_1 + k_2 < m$ و $l < n$ است، ایجاد می‌شود (شکل ۲ را ببینید).

مسیر همیلتونی در یک گراف، یک مسیر پوشا در گراف است که از هر رأس دقیقاً یک بار عبور می‌کند. مسأله‌ی مسیر همیلتونی از جمله مسائل تصمیم‌گیری است که مشخص می‌کند آیا در یک گراف مسیر همیلتونی وجود دارد یا نه. این مسأله در کلاس مسائل NP-کامل قرار می‌گیرد و کاربردهای زیادی در طراحی تراشه‌های VLSI، تجسم اطلاعات، رباتیک و غیره دارد [۱] و تنها برای کلاس‌های خاصی از گراف‌ها الگوریتم زمان چندجمله‌ای ارائه شده است [۲] و هنوز برای برخی از انواع کلاس‌های گراف این مسأله باز است [۳]. در ادامه کارهای انجام شده مربوط به گراف‌های توری مرور می‌شود. در سال ۱۹۷۸، لوسیو و موگنیا [۴] گراف‌های توری را معرفی کردند و سعی در حل مسأله‌ی مسیر همیلتونی داشتند. ایتایی و همکاران

یک توری صحیح دو بعدی نامتناهی G^∞ گرافی است که مجموعه رئوس آن شامل همه‌ی نقاط صفحه با مختصات صحیح است و دو رأس از طریق یک یال به هم متصل هستند اگر و تنها اگر فاصله اقلیدسی بین آن‌ها ۱ باشد. گراف توری G_g یک زیرگراف از G^∞ است. گراف توری بدون حفره یک گراف توری است که هر وجه داخلی آن یک مربع 1×1 است. گراف توری حفره‌دار یک گراف توری است که برخی از وجه‌های داخلی آن یک مربع 1×1 نیست. گراف توری مستطیلی $R(m, n)$ ، یک گراف توری است که توسط یک مستطیل $m \times n$ محصور شده است (شکل ۱(الف) را ببینید). گراف توری L-شکل یک گراف توری است که با حذف یک زیرگراف توری مستطیلی $R(k, l)$ از یکی از گوشه‌های یک گراف توری مستطیلی $R(m, n)$ ، به طوری که $k < m$ و $l < n$ است، ایجاد می‌شود (شکل ۱(ب) را ببینید).

نقطه (مثلاً نقطه s) در یک اتاق T-شکل شروع به جارو کردن اتاق می‌کند و نهایتاً در یک نقطه دیگر (مثلاً نقطه t) متوقف می‌شود. در این کاربرد، حتی اگر گراف مربوطه مسیر همیلتونی نداشته باشد با عبور تکراری از برخی رئوس گراف می‌توان کل اتاق را جارو کرد که کارهایی در این زمینه انجام شده است [۱۶].

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲، برخی تعاریف و نتایجی که در ادامه به آنها نیاز داریم بیان می‌شود. در بخش ۳، شرایط لازم و کافی برای وجود مسیر همیلتونی و همچنین شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t بیان می‌شود. در بخش ۴، الگوریتمی زمان خطی برای ساخت مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t بیان می‌شود. نتیجه‌گیری نیز در بخش ۵ بیان می‌شود.

۲- تعاریف و نتایج پیشین

در این بخش، برخی تعاریف و نتایج که در این مقاله به آنها نیاز داریم را بیان می‌کنیم. برخی از این تعاریف در [۱۱، ۶، ۵] تعریف شده است.

گراف توری G_g با مجموعه رئوس $V(G_g)$ و مجموعه یال‌های $E(G_g)$ را با $G_g = (V(G_g), E(G_g))$ نشان می‌دهیم. فرض کنید v یک رأس از گراف G_g باشد. مختصات v را با v_x و v_y نمایش می‌دهیم. درجه‌ی رأس v را با $d(v)$ نمایش می‌دهیم و برابر با تعداد یال‌هایی است که به رأس v ختم می‌شوند. هر رأس در گراف توری حداکثر از درجه‌ی ۴ است. دو رأس v و u را مجاور گوئیم هر گاه بین آنها یال وجود داشته باشد و مجاورت آنها را با $v \sim u$ نمایش می‌دهیم. به دو یال غیرمجاور $e_1 = (v_1, v_2)$ و $e_2 = (v_3, v_4)$ موازی می‌گوئیم، اگر $v_1 \sim v_3$ و $v_2 \sim v_4$ باشد.

یکی از ویژگی‌های گراف‌های توری دوبخشی بودن آنها است [۵]. از آنجایی که این گراف‌ها دوبخشی هستند بنابراین دو رنگ‌پذیر هستند که ما در اینجا از دو رنگ سیاه و سفید برای رنگ‌آمیزی استفاده می‌کنیم. یک رأس با رنگ سفید رنگ می‌شود اگر $v_x + v_y$ زوج باشد و در غیر اینصورت با رنگ سیاه رنگ می‌شود. اگر رأس v که $v_x + v_y$ آن زوج است با رنگ سفید رنگ شود، رئوس مجاور آن باید با رنگ سیاه رنگ شود و همه این رئوس $v_x + v_y$ فرد دارند، چون یا مختصات x یا مختصات y آنها یک واحد با مختصات رأس v اختلاف دارد. بنابراین واضح است که بین هر دو رأس هم‌رنگ یالی وجود ندارد. رنگی که بیشتر رئوس با آن رنگ‌آمیزی شده باشد را رنگ اکثریت و رنگ دیگر را رنگ اقلیت نامیده می‌نامیم. مجموعه رئوس سفیدرنگ را با V_W و مجموعه رئوس سیاه‌رنگ را با V_B نمایش می‌دهیم. تعداد رئوس سیاه‌رنگ (متناظراً سفیدرنگ) با $|W_B|$

[۵] ثابت کردند که مسأله مسیر همیلتونی برای گراف‌های توری عمومی NP-کامل است. آن‌ها همچنین نشان دادند که این مسأله برای گراف‌های توری مستطیلی در زمان خطی بر حسب اندازه گراف (تعداد رئوس و یال‌ها) حل می‌شود. آمانس و لن هارت [۳] مسأله دور همیلتونی را برای گراف‌های توری بدون حفره حل کردند و الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^4)$ ارائه کردند. چن و همکاران [۶] الگوریتم ارائه شده در [۵] را بهبود دادند و الگوریتمی موازی برای ساخت مسیر همیلتونی در گراف توری مستطیلی ارائه کردند. سلمان و همکارانش [۷] زیرکلاس‌هایی از گراف توری به نام گراف‌های توری الفبایی را معرفی کردند، که معادل با حروف الفبای انگلیسی هستند و بررسی کردند که کدام یک از این گراف‌ها دور همیلتونی دارد. کشاورز کوهجردی و باقری [۹، ۸] یک الگوریتم زمان خطی بر حسب اندازه گراف (تعداد رئوس و یال‌ها) برای پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف‌های توری الفبایی L, C, E, F و T ارائه کردند. گراف‌های توری الفبایی T که در [۹] بررسی شده است، حالت خیلی خاص گراف‌های توری T-شکل است. چانگ و همکارانش [۱۰] مسأله مسیر همیلتونی را برای یک گراف توری مستطیلی که دقیقاً یک رأس از آن حذف شده است، حل کردند. در [۱۱-۱۴] شرایط لازم و کافی برای وجود مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t در گراف‌های توری مستطیلی با یک حفره مستطیلی؛ یعنی گراف‌های توری L-شکل، C-شکل و O-شکل بررسی شده است. مسأله بررسی شده توسط چانگ و همکارانش حالت خاصی از مسأله بررسی شده در [۱۱-۱۴] است. همچنین هیدارا و همکارانش [۱۵] مسأله مسیر همیلتونی را برای یک گراف توری مستطیلی که دقیقاً دو رأس از آن حذف شده است، حل کردند.

در این مقاله، مسأله مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t در گراف‌های توری T-شکل با اندازه‌ی زوج که حداقل یکی از k_1, k_2 یا l زوج است را بررسی می‌کنیم و یک الگوریتم زمان خطی برای آن ارائه می‌دهیم.

به عنوان یکی از کاربردهای این مسأله می‌توان به موضوع تعبیه شبکه‌های ارتباطی در مبحث پردازش موازی اشاره کرد. موضوع تعبیه شبکه‌ها یکی از مباحث مهم در طراحی و ارزیابی شبکه‌های ارتباطی است و در آن بررسی می‌شود که آیا می‌توان شبکه‌های ارتباطی موجود را در یک شبکه ارتباطی مشخص تعبیه کرد. در مسأله مطرح شده در این مقاله، در واقع نحوه تعبیه یک آرایه خطی (مسیر) در یک توری دو بعدی (گراف توری T-شکل) بررسی می‌شود. به عنوان کاربرد دیگری از این مسأله می‌توان به مسأله ربات جارو کننده اشاره کرد. در این مسأله، یک ربات جارو کننده از یک

و با رنگ اکثریت رنگ شده باشند یا (ب) اندازه‌ی گراف زوج باشد و s و t غیر هم‌رنگ باشند.

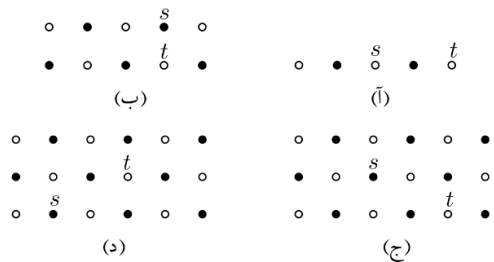
در یک گراف توری با اندازه‌ی فرد، تعداد رئوس با رنگ اکثریت یکی بیشتر از تعداد رئوس با رنگ اقلیت است. بنابراین رئوس شروع و پایان هر مسیر همیلتونی در این گراف‌ها باید رنگ اکثریت داشته باشند. به طور مشابه در یک گراف توری با اندازه‌ی زوج تعداد رئوس سیاه و سفید برابر است بنابراین رئوس شروع و پایان یک مسیر همیلتونی در این گراف‌ها باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که سازگار-رنگی s و t یک شرط لازم برای وجود داشتن مسیر همیلتونی میان رئوس s و t در گراف توری G_g است. یک مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t در G_g را با $HP(G_g, s, t)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید G_g یک گراف توری با دو رأس متمایز s و t باشد. اگر مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t در G_g وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌گوییم $HP(G_g, s, t)$ وجود دارد. بدون کم شدن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم $s_x \leq t_x$.

برای گراف‌های توری مستطیلی اگر یکی از شرایط زیر رخ دهد آن‌گاه $HP(G_R, s, t)$ وجود ندارد [۵].

(م ۱): s یا t رأس برشی باشد یا $\{s, t\}$ برش رأسی باشد (شکل ۳(آ)) و ۳(ب) را ببینید).

(م ۲): همگی حالت‌هایی که با حالات زیر یکرخت باشند:

- m زوج باشد، s سیاه باشد، $n = 3$ و
- (s_y فرد باشد و $t_x > s_x + 1$) یا (s_y زوج باشد و $t_x > s_x$) (شکل ۳(ج) و (د) را ببینید).



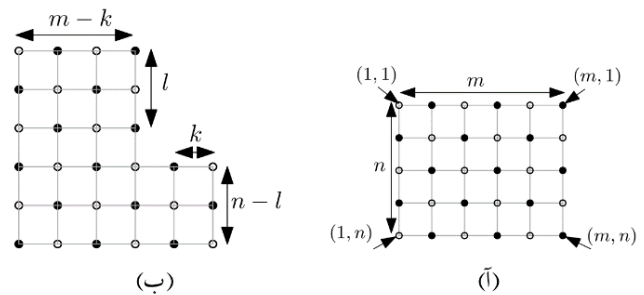
شکل ۳: حالت‌هایی که در گراف توری مستطیلی مسیر همیلتونی وجود ندارد.

قضیه ۲.۲. [۵] فرض کنید $R(m, n)$ یک گراف توری مستطیلی و s و t دو رأس متمایز از آن باشند. $HP(G_R, s, t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر s و t سازگار-رنگی داشته باشند و (G_R, s, t) در شرایط (م ۱) و (م ۲) صدق نکند.

دقت شود که در اینجا تمام حالت‌های یکرخت حذف شده است.

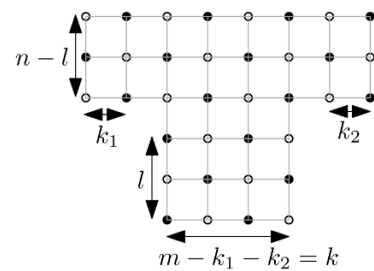
(متناظراً $|W_W|$) نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که در هر دور یا مسیر از یک گراف توری رئوس به صورت متناوب سیاه و سفید هستند.

گراف توری مستطیلی $R(m, n)$ را به اختصار با G_R نمایش می‌دهیم. شکل ۱(آ) یک گراف توری مستطیلی با $m = 6$ و $n = 5$ را نمایش می‌دهد. گراف توری مستطیلی k -مستطیلی نامیده می‌شود اگر $k = m$ یا $k = n$ باشد. در شکل‌ها، فرض می‌کنیم که (۱، ۱) مختصات رأس گوشه‌ی سمت چپ بالا باشد. مختصات بقیه رئوس به سمت راست و به سمت پایین صعودی است. گراف توری L -شکل را با $L(m, n; k, l; m - k, n - l)$ (به اختصار با G_L) نمایش می‌دهیم. فرض کنید زیرگراف توری مستطیلی $R(k, l)$ از گوشه سمت راست بالای گراف توری مستطیلی $R(m, n)$ حذف شده باشد. شکل ۱(ب) یک گراف توری L -شکل را نمایش می‌دهد.



شکل ۱: گراف توری مستطیلی $R(6, 5)$ و گراف توری L -شکل $L(6, 6; 2, 3; 4, 3)$

گراف توری T -شکل را با $T(m, n; k_1, k_2, l; k, n - l)$ (به اختصار با G_T) نمایش می‌دهیم. فرض کنید دو زیرگراف توری مستطیلی $Rl(k_1, l)$ و $Rr(k_2, l)$ به ترتیب از گوشه‌های سمت راست پایین و سمت چپ پایین گراف توری مستطیلی $R(m, n)$ حذف شده باشد (شکل ۲ را ببینید).

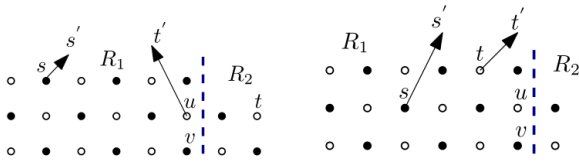


شکل ۲: گراف توری T -شکل $T(8, 6; 2, 2, 3; 4, 3)$

فرض کنید G_g یک گراف توری مستطیلی، L -شکل یا T -شکل باشد. اگر $|W_B| = |W_W|$ ، آن‌گاه اندازه گراف زوج است و اگر $|W_B| - |W_W| = 1$ باشد اندازه گراف فرد است.

تعریف ۱.۲. دو رأس متمایز s و t در G_g سازگار-رنگی نامیده می‌شوند اگر: (الف) اندازه‌ی گراف فرد باشد و s و t هم‌رنگ باشند

فرض کنید $s' = s$ و $t' = t$ ، اگر $s' \notin R_1$ (یا $t' \notin R_1$)، آن‌گاه $s' = u$ (یا $t' = u$) و (R_1, s', t') در شرط (م۲) صدق کند (شکل ۷ را ببینید).

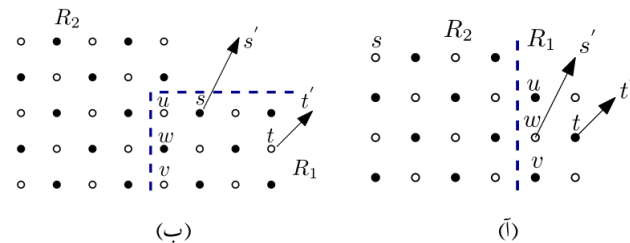


شکل ۷: شرط (م۲) در گراف توری L-شکل.

(م۹): G_L زوج باشد و $[m - k = 3$ و $n - l \geq 3$ یا $m - k > 3$] فرض کنید $\{R_1, R_2\}$ یک افراز عمودی، افقی یا عمودی و افقی از G_L باشد به طوری که R_1 یک زیرگراف توری $3-3$ مستطیلی و R_2

- یک زیرگراف توری مستطیلی باشد، یا
- یک زیرگراف توری L-شکل باشد، در اینجا n و k فرد هستند.

فرض کنید R_1 و R_2 دقیقاً از طریق سه رأس w, u و v به هم متصل باشند به طوری که $u, w, v \in R_1$. فرض کنید $s' = s$ و $t' = t$ ، اگر $s' \notin R_1$ (یا $t' \notin R_1$)، آن‌گاه $s' = w$ (یا $t' = w$) و (R_1, s', t') در شرط (م۲) صدق کند (شکل ۸ را ببینید).



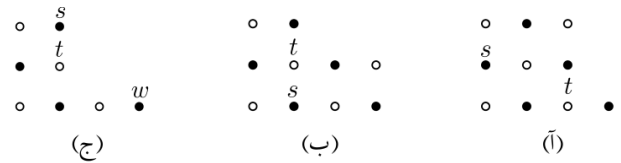
شکل ۸: شرط (م۹) در گراف توری L-شکل.

قضیه ۳.۲. [۱۱] فرض کنید G_L یک گراف توری L-شکل با دو رأس متمایز s و t باشد. $HP(G_L, s, t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر s و t سازگار-رنگی باشند و (G_L, s, t) در شرایط (م۱) و (م۳)-(م۹) صدق نکند.

لم ۴.۲ شرایط لازم و کافی را برای وجود دور همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی و L-شکل بیان می‌کند.

لم ۴.۲. [۱۱، ۵] فرض کنید G_g یک گراف توری مستطیلی یا L-شکل باشد. G_g یک دور همیلتونی دارد اگر و تنها اگر زوج باشد $k = l = 0$ و $n - l \geq 2$ و $m - k \geq 2$ برای گراف توری مستطیلی یا $k = l = 0$.

کشاورز کوهجردی و باقری [۱۱] نشان دادند که در گراف‌های توری L-شکل علاوه بر شرط (م۱) (شکل‌های (آ) و (ب)) اگر یکی از شرایط زیر رخ دهد $HP(G_L, s, t)$ وجود ندارد:

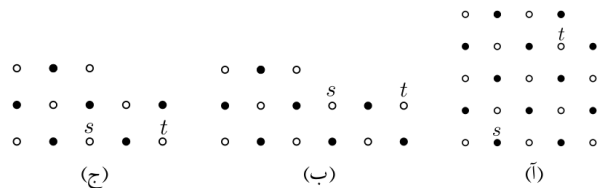


شکل ۴: حالت‌هایی که در گراف توری L-شکل مسیر همیلتونی وجود ندارد.

(م۳): $\exists w \in G_g, d(w) = 1, s \neq w$ و $t \neq w$ (شکل (ج) را ببینید).

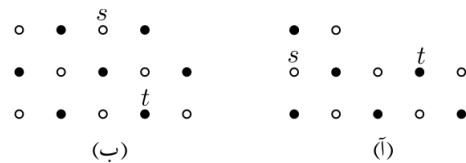
(م۴): G_L زوج باشد، $k = l = 1, m - 1$ زوج باشد، $m - 1 > 2$ و $n - l$ زوج باشد، $n - l > 2, s = (m - 1, 2), t \neq (m - 1, 1)$ و $t \neq (m, 2)$ (شکل (آ) را ببینید) (دقت کنید در این جا نقش s و t می‌تواند عوض شود یعنی $t = (m - 1, 2)$ و $s = (m - 1, 1)$).

(م۵): G_L فرد باشد، $m - k > 1, m - k$ فرد باشد، $n - l = 2$ یا $(s_x, t_x > m - k)$ یا $(s = (m - k, n))$ و $t_x > m - k$ (شکل‌های (ب) و (ج) را ببینید).



شکل ۵: شرایط (م۴) و (م۵) در گراف توری L-شکل.

(م۶): G_L زوج باشد، $m - k = 2, n - l = 2, s = (1, n - 1)$ و $t_x > 2$ (شکل (آ) را ببینید).



شکل ۶: شرایط (م۶) و (م۷) در گراف توری L-شکل.

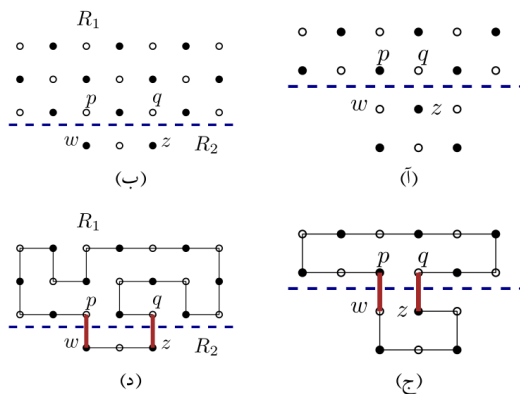
(م۷): $n = 3, l = 1, t = (m - k, 3)$ ، اندازه گراف توری L-شکل زوج باشد و $s = (m - k - 1, 1)$ (شکل (ب) را ببینید).

(م۸): G_L زوج باشد و $[m - k = 2$ و $n - l > 2$ یا $m - k > 2$ و $n - l = 2]$. فرض کنید $\{R_1, R_2\}$ یک افراز عمودی یا افقی از G_L باشد به طوری که R_1 یک زیرگراف توری $3-3$ مستطیلی و R_2 یک زیرگراف توری $2-2$ مستطیلی باشد. فرض کنید R_1 و R_2 دقیقاً از طریق دو رأس u و v به هم متصل باشند به طوری که $u, v \in R_1$.

ببینید). فرض کنید $p, q \in V(R_1)$ و $w, z \in V(R_2)$ به طوری که $q \sim w$ و $p \sim z$ در این جا، $p = (k_1 + 1, n - l)$ و

$$\begin{cases} q = (k_1 + 2, n - l) & \text{اگر } R_1 \text{ زوج باشد} \\ q = (k_1 + 3, n - l) & \text{اگر } R_1 \text{ فرد باشد} \\ q = (m - k_2, n - 1) & \text{اگر } l = 1 \text{ باشد} \end{cases}$$

از آن جایی که $p_y = q_y = n - l$ و $w_y = z_y = n - l + 1$ ، یک بررسی ساده نشان می‌دهد که (R_1, p, q) و (R_2, w, z) طبق قضیه ۲.۲ دارای مسیر همیلتونی هستند. طبق الگوریتم [۶] مسیر همیلتونی در (R_1, p, q) و (R_2, w, z) به دست می‌آوریم. سپس با اتصال رأس w به p و z به q دور همیلتونی در G_T ساخته می‌شود (شکل‌های ۱۱(ج) و ۱۱(د) را ببینید). ■



شکل ۱۱: مراحل ساخت دور همیلتونی در G_T .

اکنون شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t در گراف‌های توری T -شکل را به دست می‌آوریم. موقعیت قرار گرفتن رؤس s و t در G_T شامل ۴ حالت زیر است:

۱. $s_x, t_x \leq m - k_2$

۲. $t_x > m - k_2$ و $s_x \leq k_1$

۳. $t_x > m - k_2$ و $k_1 + 1 \leq s_x \leq m - k_2$

۴. $s_x, t_x > m - k_2$

بنابر تقارن تنها حالت‌های ۱ و ۲ را در نظر می‌گیریم.

از بخش قبل می‌دانیم که گراف توری، یک گراف دوبخشی است. بنابراین، سازگار-رنگی بودن اولین شرط لازم برای وجود مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t در گراف توری T -شکل است. در این بخش شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آنها (G_T, s, t) سازگار-رنگی است ولی در گراف بین s و t مسیر همیلتونی وجود ندارد. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که اگر (G_T, s, t) در شرایط (م۱) و (م۳) قرار گیرد، آن‌گاه بین s و t مسیر همیلتونی وجود ندارد (شکل ۱۲ را ببینید).

قضیه ۵.۲. [۵، ۱۱] فرض کنید G_T یک گراف توری مستطیلی یا یک گراف توری L -شکل باشد. فرض کنید s و t دو رأس متمایز در G_T باشد. آن‌گاه مسیر همیلتونی بین s و t و دور همیلتونی در G_T در زمان خطی (برحسب اندازه گراف) ساخته می‌شود.

در یک گراف توری مستطیلی همیشه می‌توانیم دور همیلتونی را به گونه‌ای پیدا کنیم که سه وجه آن شامل تمام یال‌های مرزی باشد. شکل ۹ نحوه ساخت دور همیلتونی در یک گراف توری مستطیلی را نشان می‌دهد.



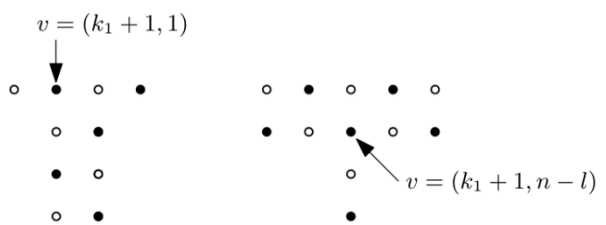
شکل ۹: دور همیلتونی در گراف توری مستطیلی.

۳- شرایط لازم برای وجود مسیر همیلتونی بین دو رأس متمایز s و t در گراف توری T -شکل

در این بخش، ابتدا شرایط لازم و کافی برای وجود دور همیلتونی در گراف‌های توری T -شکل را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۳. گراف توری T -شکل G_T دور همیلتونی دارد اگر و تنها اگر اندازه آن زوج باشد، $1 < n - l$ و $k > 1$.

اثبات: (\Leftarrow) از آنجایی که G_T یک گراف دوبخشی است، هر دور همیلتونی در این گراف شامل رؤسی است که یکی در میان سیاه و سفید هستند. بنابراین هر دور همیلتونی باید تعداد زوجی رأس داشته باشد. در نتیجه اندازه G_T نمی‌تواند فرد باشد. حال فرض کنید $n - l = 1$ و $v = (k_1 + 1, 1)$ (یا $v = (k_1 + 1, n - k)$) به وضوح v یک رأس برشی است و هر دور در G_T باید دو بار از این رأس عبور کند. بنابراین G_T هیچ دور همیلتونی ندارد.

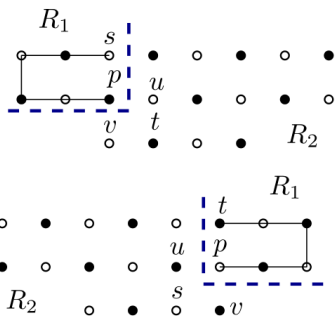


شکل ۱۰: دور همیلتونی در G_T در حالتی که رأس برشی وجود دارد (\Rightarrow) یک برش افقی روی G_T انجام می‌دهیم و گراف را به دو زیر گراف توری مستطیلی مجاور باهم تقسیم می‌کنیم به طوری که $R_1 = R(m, n - l)$ و $R_2 = R(k, l)$ (شکل‌های ۱۱(ا) و ۱۱(ب) را

(ب) $t = (k_1 + 2, 1)$ و $s_x \leq m - k_2$, $s_y > n - l$ (شکل ۱۴ (ب) را ببینید)

(ج) $s_y, t_y \leq n - l$, $t_x > k_1 + 1$, $s_x \leq k_1$ (شکل‌های ۱۴ (ج) و ۱۴ (د) را ببینید).

(۱۳م): m, k_1, k_2 زوج باشند، $n - l > 1$, $l = 1$, $n = 3$ و $s = (m - k_2 -)$ یا $(t = (k_1 + 2, n))$ و $s = (k_1 + 1, 1)$ [(شکل ۱۵ (ب) را ببینید).



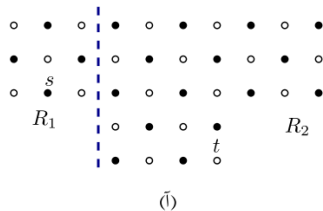
شکل ۱۵: شرط (۱۳م) در G_T .

(۱۴م): m و k زوج باشد، n فرد باشد، k_1 فرد باشد، $k > 2$, $n - l = 3$ و سیاه و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

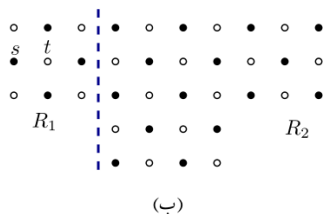
(الف) $s_x \leq k_1$, $t_x > k_1$ (شکل ۱۶ (آ) را ببینید)

(ب) $s_x, t_x \leq k_1$ و $[s_y$ فرد باشد و $t_x > s_x + 1$ یا s_y زوج باشد و $t_x > s_x$] (شکل ۱۶ (ب) را ببینید)

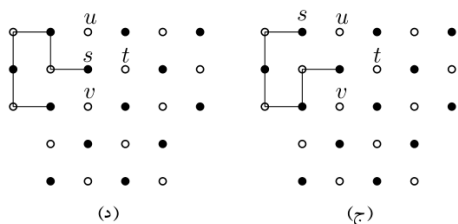
(ج) k_2 فرد باشد، $k = 4$, l زوج باشد، $k_1 + s_y, t_y \leq n - l$ و $1 \leq s_x, t_x \leq m - k_2$ (شکل‌های ۱۶ (ج) و ۱۶ (د) را ببینید).



(آ)



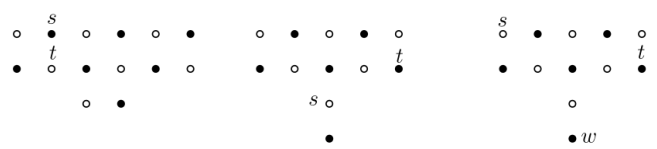
(ب)



(د)

(ج)

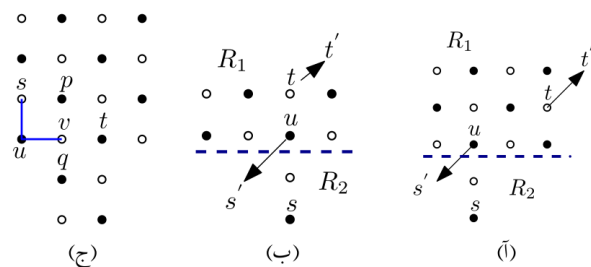
شکل ۱۶: شرط (۱۴م) در G_T .



شکل ۱۲: شرایط (۱م) و (۳م) در G_T .

در ادامه، شرایط دیگری را به دست می‌آوریم که اگر (G_T, s, t) در آن شرایط قرار گیرد بین s و t در G_T مسیر همیلتونی وجود ندارد.

(۱۰م): فرض کنید $\{R_1, R_2\}$ یک افراز عمودی یا افقی از یک گراف توری T-شکل باشد به طوری که R_2 یک زیر گراف توری 1×1 مستطیلی باشد و R_1 یک گراف توری 2×2 مستطیلی یا 3×3 مستطیلی باشد (شکل‌های ۱۳ (آ) و ۱۳ (ب) را ببینید). فرض کنید R_1 و R_2 از طریق دقیقاً یک رأس u به هم متصل باشند به طوری که $u \in R_1$. فرض کنید $s' = s$ و $t' = t$ (یا $s' \notin R_1$ یا $t' \notin R_1$)، آن‌گاه $s' = u$ (یا $t' = u$) در شرط (۱م) یا (۲م) صدق کند.



(ج)

(ب)

(آ)

شکل ۱۳: شرایط (۱۰م) و (۱۱م) در G_T .

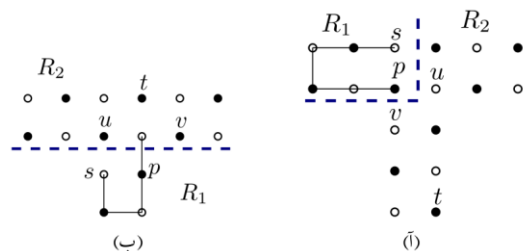
(۱۱م): $n - l > 3$, $k_1 = 1$, $k = 2$, $t = (3, n - l)$

$s = (1, n - l - 1)$ (شکل ۱۳ (ج) را ببینید).

(۱۲م): $\{s, t\}$ برش رأسی نباشند، $n - l = 2$, $k = 2$ و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

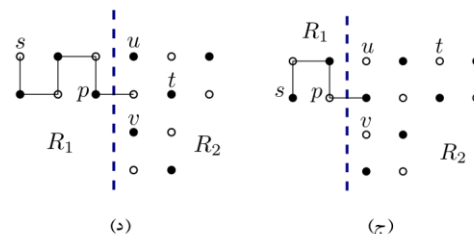
(الف) $s = (k_1 + 1, 1)$, $t_x \leq m - k_2$, $t_y > n - l$ (شکل

۱۴ (آ) را ببینید).



(آ)

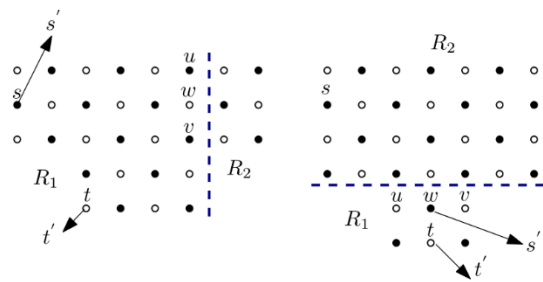
(ب)



(د)

(ج)

شکل ۱۴: شرط (۱۲م) در G_T .



شکل ۱۹: شرط (۱۷م) در G_T .

قضیه ۲.۳. فرض کنید G_T یک گراف توری T -شکل با اندازه‌ی زوج باشد و فرض کنید s و t دو رأس متمایز در آن باشد. اگر (G_T, s, t) مسیر همیلتونی داشته باشد، آن‌گاه آن سازگار-رنگی است و در هیچ‌یک از شرایط (م)، (۳م)، و (م۱۰م)-(۱۷م) قرار ندارد. اثبات: به برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم درست نباشد. ثابت می‌کنیم که (G_T, s, t) مسیر همیلتونی ندارد. آن‌گاه (G_T, s, t) مسیر همیلتونی سازگار-رنگی نباشد، آن‌گاه (G_T, s, t) مسیر همیلتونی داشته باشد. در ادامه نشان خواهیم داد که اگر یکی از شرایط (م)، (۳م)، و (م۱۰م)-(۱۷م) برقرار باشد، آن‌گاه (G_T, s, t) مسیر همیلتونی ندارد.

برای شرایط (م) و (۳م) اثبات ساده است، شکل ۱۲ را ببینید. برای شرط (م۱۰م)، شکل‌های ۱۳(آ) و ۱۳(ب) را در نظر بگیرید. چون دو زیرگراف R_1 و R_2 دقیقاً از طریق یک رأس به هم متصل شده‌اند، به وضوح مسیر همیلتونی باید از طریق رأس u وارد R_1 شود و به t برود. بنابراین اگر (R_1, s', t') مسیر همیلتونی نداشته باشد، آن‌گاه در (G_T, s, t) مسیر همیلتونی وجود ندارد. برای شرط (م۱۱م)، فرض کنید بین s و t مسیر همیلتونی وجود داشته باشد (فرض خلف). شکل ۱۳(ج) را در نظر بگیرید. چون $d(u) = 2$ است، مسیر همیلتونی با شروع از رأس s باید به رأس u برود و سپس به رأس v برود. سپس برای ادامه‌ی مسیر سه انتخاب دارد (از v به p ، از v به q یا از v به t برود) که هر کدام از آن‌ها را انتخاب کند، تعدادی از رئوس خارج از مسیر قرار می‌گیرند که این با فرض خلف در تناقض است.

برای شرایط (م۱۲م) و (م۱۳م)، شکل‌های ۱۴ و ۱۵ را در نظر بگیرید. مسیر همیلتونی با شروع از رأس s باید کل رئوس R_1 را پیمایش کند و از طریق رأس p از R_1 خارج شود و به زیرگراف R_2 وارد شود و در نهایت به t برود. یک بررسی ساده نشان می‌دهد هیچ مسیر همیلتونی وجود ندارد که شامل هر دو رأس u و v باشد.

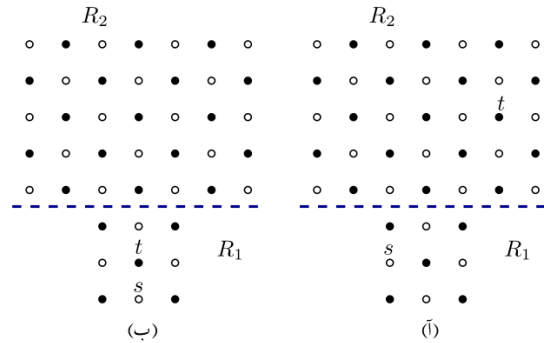
برای شرط‌های (م۱۴م) و (م۱۵م): شکل‌های ۱۶(آ)، ۱۶(ب) و ۱۷ را در نظر بگیرید. به وضوح هر دو زیرگراف R_1 و R_2 فرد هستند. واضح

(م۱۵م): m و l فرد باشد، n زوج باشد، $k = 3$ ، $n - l > 3$

سفید باشد و یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

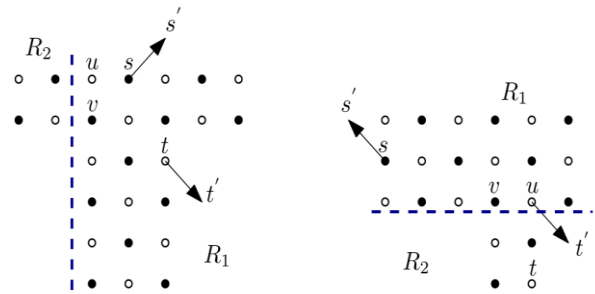
(الف) $s_y > n - l$ و $t_y \leq n - l$ (شکل ۱۷(آ) را ببینید)

(ب) $s_y > t_y$ ، $s_y, t_y > n - l$ و $|s_y - t_y| > 1$ یا s_x زوج باشد و $|s_y - t_y| \geq 1$ (شکل ۱۷(ب) را ببینید).



شکل ۱۷: شرط (۱۵م) در G_T .

(م۱۶م): فرض کنید $k = 2$ و $n - l = 3$ یا $k = 3$ و $n - l = 3$. فرض کنید $\{R_1, R_2\}$ یک افزایش عمودی یا افقی از G_T باشد به طوری که R_2 یک زیرگراف توری ۲-مستطیلی باشد. فرض کنید R_1 و R_2 دقیقاً از طریق دو رأس u و v به هم متصل باشند به طوری که $u, v \in R_1$. فرض کنید $s' = s$ و $t' = t$ ، اگر $s' \notin R_1$ (یا $t' \notin R_1$)، آن‌گاه $s' = u$ (یا $t' = u$) و (R_1, s', t') در شرط (م۲) یا (م۸) صدق کند (شکل ۱۸ را ببینید).



شکل ۱۸: شرط (۱۶م) در G_T .

(م۱۷م): فرض کنید $k = 3$ و $n - l > 2$ و l زوج باشد (یا $k > 2$ ، $n - l = 3$ و k_1 زوج باشد). یک افزایش عمودی یا افقی از G_T باشد به طوری که R_2 و R_1 زوج باشند. فرض کنید R_2 و R_1 دقیقاً از طریق سه رأس u, w, v به هم متصل باشند به طوری که $u, w, v \in R_1$. فرض کنید $s' = s$ و $t' = t$ ، اگر $s' \notin R_1$ (یا $t' \notin R_1$)، آن‌گاه $s' = w$ (یا $t' = w$) و (R_1, s', t') در شرط (م۲) یا (م۹) صدق کند (شکل ۱۹ را ببینید).

است که برای پوشش دادن رئوس R_1 از طریق تعدادی مسیر همیلتونی مجزا حداقل به دو مسیر نیاز است. این مسیره‌ها باید سه رأس هم‌رنگ در مرز مشترک با زیرگراف R_2 داشته باشند. چون تنها دو رأس هم‌رنگ در مرز مشترک بین دو زیرگراف وجود دارد، بنابراین هیچ مسیر همیلتونی نمی‌تواند بین دو رأس s و t وجود داشته باشد. حال شکل‌های ۱۶(ج) و ۱۶(د) را در نظر بگیرید. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که هیچ مسیر همیلتونی بین دو رأس s و t وجود ندارد که شامل هر دو رأس u و v باشد.

برای شرط (م۱۶)، دو حالت داریم (شکل ۱۸ را در نظر بگیرید):

حالت ۱. $s, t \in R_1$. مسیر همیلتونی با شروع از رأس s باید یک سری از رئوس R_1 را پیمایش کند و زیرگراف R_1 را از طریق رأس u ترک کند و وارد R_2 شود، سپس از تمام رئوس R_2 عبور کند و از طریق رأس v به R_1 برگردد و از همه‌ی رئوس باقی‌مانده عبور کند و به t برود؛ که این با تعریف مسیر همیلتونی در تناقض است.

حالت ۲. $t \in R_1$ و $s \in R_2$ (یا $s \in R_1$ و $t \in R_2$). مسیر همیلتونی از رأس s شروع می‌شود و همه‌ی رئوس R_2 را پیمایش می‌کند و از طریق رأس u وارد R_1 می‌شود و سپس همه‌ی رئوس R_1 را پیمایش می‌کند و به t می‌رود. این غیر ممکن است زیرا فرض کردیم که (R_1, s', t') در شرط (م۲) یا (م۸) صدق می‌کند. در این حالت $t' = t$ و $s' = u$ (یا $s' = s$ و $t' = u$).

برای شرط (م۱۷)، حالت‌های زیر را در نظر بگیرید (شکل ۱۹ را ببینید).

حالت ۱. $s \in R_2$ و $t \in R_1$. زیرحالت‌های زیر را در نظر بگیرید.

زیرحالت ۱.۱. مسیر همیلتونی با شروع از رأس s همه‌ی رئوس R_2 را پیمایش می‌کند و از طریق یکی از سه رأس u ، v و w وارد R_1 می‌شود، از همه‌ی رئوس R_1 عبور می‌کند و به t می‌رسد. این غیر ممکن است زیرا فرض کردیم (R_1, s', t') در شرط (م۲) یا (م۹) صدق کند. در این حالت $s' = w$ و $t' = t$.

زیرحالت ۲.۱. مسیر همیلتونی با شروع از رأس s یک سری از رئوس R_2 را پیمایش می‌کند و از طریق یکی از سه رأس u ، v و w وارد R_1 می‌شود و از یک سری از رئوس R_1 عبور می‌کند، سپس R_1 را ترک کرده و مجدداً وارد R_2 می‌شود و همه‌ی رئوس باقی‌مانده را پیمایش می‌کند و از طریق یکی از رئوس u ، v و w وارد R_1 می‌شود و همه‌ی رئوس باقی‌مانده را پیمایش می‌کند و در آخر به t می‌رود. در این حالت R_1 شامل دو زیرمسیر P_1 و P_2 است. زیرمسیر P_1 از u به v (یا از v به u) و w به t (یا از t به u) شامل دو زیرمسیر P_2 است (یا از u به t یا از v به t) است. این حالت غیر ممکن است زیرا اندازه‌ی P_1 فرد (یا زوج) است و اندازه‌ی P_2 زوج (یا فرد) است. آن‌گاه $|P_1| + |P_2|$ فرد است درحالی که اندازه‌ی R_1 زوج است.

حالت ۲. $s, t \in R_1$. زیرحالت‌های زیر را در نظر بگیرید. زیرحالت ۱.۲. مسیر همیلتونی با شروع از رأس s از سری از رئوس R_1 عبور می‌کند و زیرگراف R_1 را از طریق یکی از رئوس u ، v و w ترک کرده و سپس با عبور از تمامی رئوس R_2 مجدداً از طریق رأس u ، v و w به R_1 برمی‌گردد و همه‌ی رئوس باقی‌مانده را پیمایش و به t می‌رود. در این حالت با اتصال u به w یا v به w مسیر همیلتونی در G_T به دست می‌آید که این با فرضی که (R_1, s', t') در شرط (م۲) یا (م۹) صدق کند تناقض دارد.

زیرحالت ۲.۲. مسیر همیلتونی که از رأس s شروع می‌شود، یک سری از رئوس R_1 را پیمایش می‌کند. زیرگراف R_1 را از طریق یکی از رئوس u یا v ترک می‌کند، سپس وارد R_2 شده و تمام رئوس آن را پیمایش می‌کند. R_2 را ترک کرده و مجدداً از طریق یکی از رئوس u یا v وارد R_1 می‌شود و به w می‌رود و همه‌ی رئوس باقی‌مانده را پیمایش می‌کند و در نهایت به t می‌رود. در این حالت R_1 شامل دو زیرمسیر P_1 و P_2 است. زیرمسیر P_1 از s به v (یا از s به u) و زیرمسیر P_2 از u به t (یا از v به t) است. این غیر ممکن است زیرا اندازه‌ی P_1 زوج است و اندازه‌ی P_2 فرد است، آن‌گاه $|P_1| + |P_2|$ فرد است درحالی که اندازه‌ی R_1 زوج است.

زیرحالت ۳.۲. در این حالت می‌توان فرض کرد که مسیر همیلتونی از رأس s شروع شود و زیرگراف R_1 را از طریق رأس w ترک کند و مجدداً از طریق u یا v به R_1 برود. واضح است که در این حالت u یا v نمی‌توانند در مسیر قرار بگیرند و این تناقض است. ■

۴- الگوریتم ساخت مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t

در این بخش، نشان می‌دهیم که چگونه مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t ساخته می‌شود. دقت کنید (G_T, s, t) در هیچ‌یک از شرایط (م۱)، (م۳) و (م۱۰) - (م۱۷) قرار ندارد.

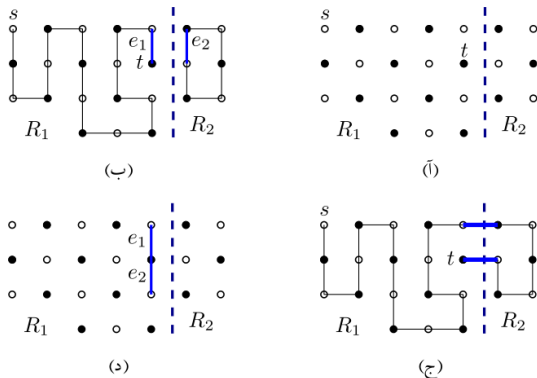
ابتدا حالتی که $(n - l = 1)$ یا $(k = 1 \text{ و } n - l > 1)$ را در نظر می‌گیریم.

لم ۱.۴. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل باشد با $(n - l = 1)$ یا $(k = 1 \text{ و } n - l > 1)$ فرض کنید s و t دو رأس متمایز باشند به طوری که (G_T, s, t) در شرایط (م۱)، (م۳) و (م۱۰) قرار نگیرد، آن‌گاه (G_T, s, t) مسیر همیلتونی دارد؛ یعنی $HP(G_T, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: فرض کنید $(n - l = 1)$ یا (متناظراً $k = 1 \text{ و } n - l > 1$) آن‌گاه با یک برش عمودی (متناظراً برش افقی) گراف توری T-شکل را به دو زیر گراف توری $R_1 = R(k, 1)$ و $R_2 = L(n, m - k)$ یا $R_1 = R(1, l)$ و $R_2 = R(m, n - l)$ متناظراً k_1, k_2, l افراز

حالت ۱. $n - l > 2$ در این حالت با یک برش عمودی گراف توری T-شکل را به دو زیر گراف توری $R_1 = R(k_2, n - l)$ و $R_2 = R(k_2, n - l)$ (شکل ۲۲(آ)) را ببینید. چون زوج است به وضوح R_2 زوج است. همچنین چون اندازه کل گراف زوج است، نتیجه می‌گیریم که R_1 نیز زوج است. چون R_1 زوج است، (R_1, s, t) سازگار-رنگی است. حال نشان می‌دهیم (R_1, s, t) در شرایط (م ۱) و (م ۳)-(م ۹) صدق نمی‌کند. چون اندازه R_1 زوج است، $n - l > 2$ و $k_1 \times l$ زوج است، تنها کافی است که نشان دهیم (R_1, s, t) در شرایط (م ۱) و (م ۹) قرار ندارد. به آسانی می‌توان بررسی کرد که اگر (R_1, s, t) در شرط (م ۱) یا (م ۹) قرار گیرد، آن‌گاه (G_T, s, t) در شرط (م ۱)، (م ۱۴)، (م ۱۵) یا (م ۱۷) قرار می‌گیرد، که تناقض است. پس بنابر قضیه ۳.۲، $HP(R_1, s, t)$ وجود دارد. بنابراین مسیر همیلتونی در R_1 می‌تواند طبق الگوریتم [۱۱] پیدا شود.

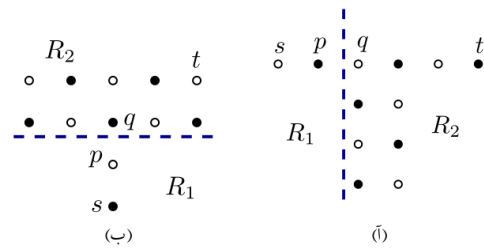
همچنین از آن جایی که R_2 یک گراف توری مستطیلی با اندازه زوج است، پس بنابر لم ۴.۲ دارای دور همیلتونی دارد (شکل ۲۲(ب)) را ببینید. در نهایت، با ترکیب کردن مسیر همیلتونی در R_1 و دور همیلتونی در R_2 با استفاده از دو یال موازی e_1 و e_2 مانند شکل ۲۲(ب) مسیر همیلتونی بین s و t ساخته می‌شود (شکل ۲۲(ج)). از آن جایی که $n - l > 2$ و در هر مسیر همیلتونی بین s و t در R_1 تمام رئوس R_1 وجود دارد، بنابراین حداقل یکی از یال‌های e_1 و e_2 (شکل ۲۲(د)) در R_1 وجود دارد. در نتیجه همیشه می‌توان مسیر همیلتونی در R_1 و دور همیلتونی در R_2 را با هم ترکیب کرد.



شکل ۲۲: مراحل ساخت مسیر همیلتونی در G_T در حالتی که $n - l > 2$.

حالت ۲. $n - l = 2$ اگر $t \neq (m - k_2, 1)$ باشد، آن‌گاه مسیر همیلتونی بین s و t مانند حالت ۱ ساخته می‌شود. حال فرض کنید $t = (m - k_2, 1)$ یا $s = (m - k_2, 1)$ بدون کم شدن از کلیت مسأله فرض کنید $t = (m - k_2, 1)$. زیر حالت‌های زیر را برای رأس s در نظر بگیرید.

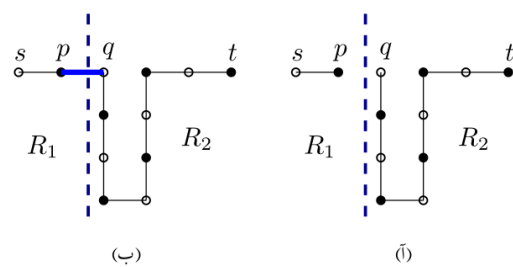
می‌کنیم. فرض کنید $s, p \in R_1$ و $t, q \in R_2$ و $p \sim q$ و $p = (k_1, 1)$ اگر $n - l = 1$ در غیر این صورت $p = (k_1 + 1, n - l + 1)$ شکل ۲۰ را ببینید.



شکل ۲۰: یک برش افقی یا عمودی روی G_T .

به وضوح اگر $n - l = 1$ (متناظراً $k = 1$) باشد، آن‌گاه $s = (1, 1)$ (متناظراً $s = (k, n)$). دقت کنید در این حالت نقش رئوس s و t می‌تواند عوض شود.

از آنجایی که R_1 یک مستطیلی است و s و p دو رأس پایانی در آن است، به وضوح (R_1, s, p) سازگار-رنگی است و در شرایط (م ۱) و (م ۲) قرار ندارد. پس بنابر قضیه ۳.۲، $HP(R_1, s, p)$ وجود دارد. بنابراین یک مسیر همیلتونی در R_1 می‌تواند براساس الگوریتم [۶] پیدا شود. علاوه بر آن (R_2, q, t) نیز سازگار-رنگی است و در شرایط (م ۱) و (م ۲) یا (م ۱) و (م ۳)-(م ۹) قرار ندارد. اگر (R_2, q, t) در شرایط (م ۱) و (م ۲) یا (م ۱) و (م ۳)-(م ۹) قرار گیرد، آن‌گاه (G_T, s, t) در شرط (م ۱) یا (م ۱۰) قرار می‌گیرد، که تناقض است. پس بنابر قضیه ۳.۲ یا ۳.۲، $HP(R_2, q, t)$ وجود دارد. بنابراین یک مسیر همیلتونی در R_2 می‌تواند براساس الگوریتم [۶] یا [۱۱] ساخته شود (شکل ۲۱(آ)) را ببینید. در نهایت، با اتصال دو p و q مسیر همیلتونی در گراف توری T-شکل ساخته می‌شود (شکل ۲۱(ب)) را ببینید. ■



شکل ۲۱: (الف) مسیر همیلتونی در R_1 و R_2 و (ب) مسیر همیلتونی در G_T .

لم ۲.۴. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل با $k > 1$ و k_2 زوج باشد و $n - l > 1$ باشد. فرض کنید s و t دو رأس متمایز باشند به طوری که $s_x, t_x \leq m - k_2$ و (G_T, s, t) در شرایط (م ۱)، (م ۱۱)-(م ۱۷) قرار نگیرد، آن‌گاه (G_T, s, t) مسیر همیلتونی دارد؛ یعنی $HP(G_T, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

غیرهمرنگ هستند، نتیجه می‌گیریم q و t نیز هم‌رنگ هستند. بنابراین، (R_1, s, p) و (R_2, q, t) سازگار-رنگی هستند. با استدلالی مشابه برای n زوج نیز ثابت می‌شود (R_1, s, p) و (R_2, q, t) سازگار-رنگی هستند.

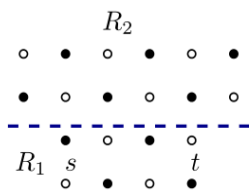
چون $n-l=2$ و $p_y = q_y = n$ و $t_y = 1$ و $s_y \neq n-l$ یک بررسی ساده نشان می‌دهد (R_1, s, p) و (R_2, q, t) در شرایط (م) و (م) (۳) (۹) قرار ندارند. بنابراین بنا بر قضیه ۳.۲ مسیر همیلتونی دارند. در نتیجه، طبق الگوریتم [۱۱] مسیر همیلتونی در R_1 و R_2 ساخته می‌شود. ■

لم ۳.۴. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل با $n-l > 1$ و $k > 1$ و k_2 فرد باشد. فرض کنید s و t دو رأس متمایز باشند به طوری که $s_x, t_x \leq m - k_2$ و (G_T, s, t) در شرایط (م) (۱)، (م) (۱۱) - (م) (۱۷) قرار نگیرد، آن‌گاه (G_T, s, t) مسیر همیلتونی دارد؛ یعنی $HP(G_T, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: در این جا، l زوج است. چون n زوج است (متناظراً n فرد است)، نتیجه می‌گیریم که $n-l$ زوج است (متناظراً $n-l$ فرد است). همچنین چون $k_1, k_2, k \geq 1$ به وضوح $m \geq 4$ فرض کنید $n-l=2$ باشد، آن‌گاه مسیر همیلتونی مانند حالت ۲ از لم ۲.۴ ساخته می‌شود. حال فرض کنید $n-l > 2$ حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $s_y, t_y > n-l$ دو حالت زیر برای l رخ می‌دهد.

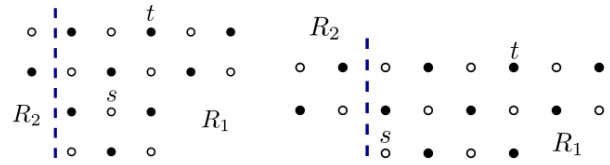
زیر حالت ۱.۱. $(l > 2)$ یا $l = 2$ و $(s_x \neq t_x)$ ، $(s_x = t_x = m - k_2)$ در این حالت، با یک برش افقی گراف توری T-شکل را به دو زیر گراف توری $R_1 = R(k, l)$ و $R_2 = R(m, n-l)$ افراز می‌کنیم (شکل ۲۶ را ببینید) به طوری که $s, t \in R_1$.



شکل ۲۶: یک برش افقی روی G_T .

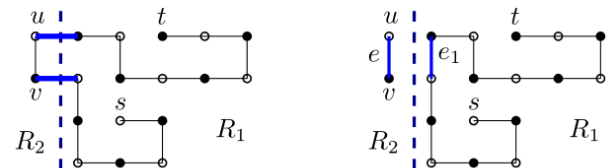
چون l زوج است به وضوح R_1 زوج است. همچنین چون اندازه کل گراف زوج است، نتیجه می‌گیریم که R_2 نیز زوج است. چون R_1 زوج است، (R_1, s, t) سازگار-رنگی است. اگر (R_1, s, t) در شرایط (م) (۱) یا (م) (۲) صدق کند، آن‌گاه (G_T, s, t) در شرط (م) (۱۷) قرار می‌گیرد، که تناقض است. مسیر همیلتونی مانند حالت ۱ از لم ۲.۴ ساخته می‌شود. در اینجا طبق الگوریتم [۶] مسیر همیلتونی در (R_1, s, t) ساخته می‌شود.

زیر حالت ۱.۲. $s_x > k_1$ و $s \neq (k_1 + 1, 1)$ در این حالت با یک برش عمودی گراف توری G_T را به دو زیر گراف $R_2 = R(k_1, 2)$ و $R_1 = L(m - k_1, n, k_2, l)$ افراز می‌کنیم (شکل ۲۳ را ببینید).



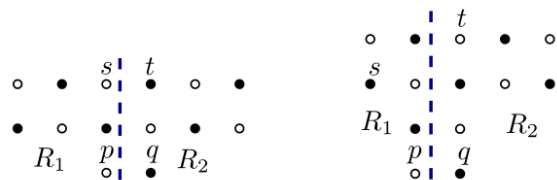
شکل ۲۳: یک برش عمودی روی G_T .

چون $n-l=2$ به وضوح R_2 زوج است. همچنین چون اندازه کل گراف زوج است، نتیجه می‌گیریم که R_1 نیز زوج است. چون R_1 زوج است، (R_1, s, t) سازگار-رنگی است. حال نشان می‌دهیم (R_1, s, t) در شرایط (م) (۱) و (م) (۴) (۹) صدق نمی‌کند. اگر (R_1, s, t) در شرایط (م) (۱) و (م) (۴) (۹) قرار گیرد، آن‌گاه (G_T, s, t) در شرط (م) (۱)، (م) (۱۲)، (م) (۱۳) یا (م) (۱۶) قرار می‌گیرد، که تناقض است. فرض کنید $k_1 > 1$ باشد، آن‌گاه میسر همیلتونی بین s و t مانند حالت ۱ ساخته می‌شود. حال فرض کنید $k_1 = 1$ باشد، آن‌گاه $|R_2| = 2$. فرض کنید $e = (u, v) \in R_2$ با ترکیب کردن یال e با مسیر همیلتونی در R_1 ، مسیر همیلتونی در G_T ساخته می‌شود (شکل ۲۴ را ببینید). دقت کنید چون $s \neq (k_1 + 1, 1)$ است به وضوح همیشه یال e_1 برای ترکیب کردن وجود دارد.



شکل ۲۴: ساخت مسیر همیلتونی در G_T .

حالت ۲.۲. $s = (k_1 + 1, 1)$ یا $s_x \leq k_1$ مسیر همیلتونی مانند لم ۱.۴ ساخته می‌شود. فقط در این حالت، $R_1 = L(k_1 + 1, n; k_1, l)$ و $R_2 = L(m - k_1 - 1, n; k_2, l)$ (شکل ۲۵ را ببینید).

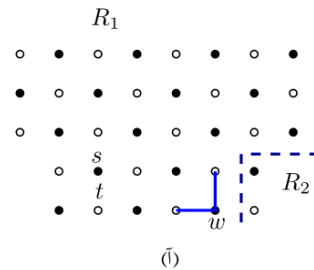


شکل ۲۵: یک برش عمودی روی G_T .

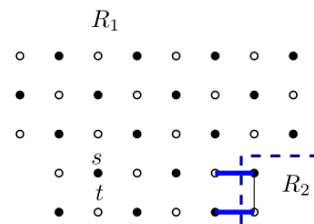
فرض کنید n زوج باشد (متناظراً n فرد باشد)، چون $n-l=2$ بنابراین l زوج است (متناظراً l فرد است). در نتیجه، اگر n زوج باشد، آن‌گاه R_1 و R_2 زوج هستند؛ در غیراینصورت فرد هستند. فرض کنید n فرد باشد. چون $p_y = n$ و $s_y = 1$ پس s و p هم‌رنگ هستند. همچنین چون q و p غیرهمرنگ هستند و s و t نیز

زیر حالت ۲.۱. $l = 2$ و $k_1 + 1 < s_x = t_x < m - k_2$ در این حالت، اگر $k > 3$ و $s_x = t_x = k_1 + 2$ و $k = 3$ باشد، آن گاه (G_T, s, t) در شرط (م ۱۷) قرار می گیرد، که تناقض است. با یک برش افقی و یک برش عمودی گراف توری توری T -شکل را به دو زیرگراف توری $R_1 = T(m, n; k_1, k_2 + 1, l)$ و $R_2 = G_T \setminus R_1$ افزایش می کنیم (شکل ۲۷(آ) را ببینید) به طوری که $s, t \in R_1$ چون l زوج است، به وضوح R_2 زوج است. همچنین چون اندازه کل گراف زوج است، نتیجه می گیریم که R_1 نیز زوج است. چون R_1 زوج است، (R_1, s, t) سازگار-رنگی است. در لم ۲.۴ قرار می گیرد.

شکل ۲۷(ب) را در نظر بگیرید. چون $d(w) = 2$ هر مسیر همیلتونی در R_1 باید از w عبور کند، بنابراین زیرمسیر کشیده شده در شکل ۲۷ همیشه وجود دارد. مسیر همیلتونی در G_T مانند حالت ۱.۲ از لم ۲.۴ ساخته می شود.



(آ)



(ب)

شکل ۲۷: یک برش افقی و عمودی روی G_T .

حالت ۲. $s_y, t_y \leq n - l$ دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

زیرحالت ۱.۲. $(n - l > 4)$ یا $(n - l = 3)$ و $[s$ سفید باشد] یا $(s$ سیاه باشد، s_y فرد باشد و $t_x = s_x + 1)$. مسیر همیلتونی مانند زیرحالت ۱.۱ ساخته می شود. در این جا، $R_1 = R(m, n - l)$ و $R_2 = R(k, l)$

زیرحالت ۲.۲. $m - l = 3$ s سیاه باشد و $[s_y$ فرد باشد و $t_x > s_x + 1$ یا $(s_y$ زوج باشد و $t_x > s_x)$. در این حالت، m زوج است. مسیر همیلتونی مانند زیرحالت ۲.۱ ساخته می شود.

حالت ۳. $s_y \leq n - l$ و $t_y > n - l$. در این جا نقش s و t می تواند عوض شود. برای حالتی که $n - l = 3$ است، فرض کنید s سیاه باشد. حالتی که s سفید باشد، به قرینه حذف شده است.

زیرحالت ۱.۳. $(l > 2)$ یا $(l = 2)$ و $l = 2$ و $t \neq (k_1 + 2, n)$. مسیر همیلتونی مانند لم ۱.۴ ساخته می شود. در این جا، $R_2 = R(k, l)$

چون $n - l$ یا m زوج است، نتیجه می گیریم R_1 و R_2 زوج هستند. به وضوح (R_1, s, p) و (R_2, q, t) سازگار-رنگی هستند. (R_2, q, t) را در نظر بگیرید. چون $t_x = q_x \neq k_1 + 2$ پس (R_2, q, t) در شرایط (م ۱) و (م ۲) صدق نمی کند. حال (R_1, s, p) را در نظر بگیرید. چون $n - l > 2$ ، به وضوح (R_1, s, p) در شرط (م ۱) قرار ندارد. شرط (م ۲) زمانی رخ می دهد که $n - l = 3$ و $n - l > k_1 + 2$ و $p_x > k_1 + 2$ چون $p_x \leq k_1 + 2$ بنابراین چنین حالتی رخ نمی دهد. در نتیجه (R_1, s, p) در شرایط (م ۱) و (م ۲) صدق نمی کند.

زیر حالت ۲.۳. $l = 2$ و $t = (k_1 + 2, n)$. مسیر همیلتونی مانند زیر حالت ۲.۱ ساخته می شود. ■

لم ۴.۴. فرض کنید G_T یک گراف توری T -شکل با $n - l > 1$ و $k > 1$ باشد. فرض کنید s و t دو رأس متمایز باشند به طوری که (G_T, s, t) در شرایط (م ۱)، (م ۱۱)-(م ۱۷) قرار نگیرد. فرض کنید $s_x \leq k_2$ و $t_x > m - k_2$. آن گاه (G_T, s, t) مسیر همیلتونی دارد؛ یعنی $HP(G_T, s, t)$ وجود دارد.

اثبات: حالت های زیر را در نظر بگیرید.

حالت ۱. $(l > 1)$ و $n - l$ زوج باشد) یا $(m$ زوج باشد و $n - l$ فرد باشد). مسیر همیلتونی بین s و t مانند زیر حالت ۱.۲ از لم ۳.۴ ساخته می شود.

حالت ۲. $(l = 1)$ یا $(m$ و $n - l$ فرد باشند). در این حالت، k_1 زوج است. مسیر همیلتونی s و t مانند لم ۱.۴ ساخته می شود. در این جا، $R_1 = R(k_1, n - l)$ و $R_2 = L(m - k_1, n; k_2, l)$. فرض کنید $w = (k_1, 1)$. آن گاه $p = (k_1, 1)$ اگر s و w غیرهمرنگ باشند؛ در غیر این صورت $p = (k_1, 2)$ چون k_1 زوج است نتیجه می گیریم R_1 و R_2 زوج هستند. به وضوح (R_1, s, p) و (R_2, q, t) سازگار-رنگی هستند. اگر (R_1, s, p) در شرط (م ۱) و (م ۲) صدق کند، آن گاه (G_T, s, t) در شرط (م ۱۷) صدق می کند؛ که تناقض است.

حال (R_2, q, t) را در نظر بگیرید. چون $q_x = k_1 + 1$ و $t_x > m - k_2$ ، $k_2 > 1$ و $n - l > 1$ ، به وضوح شرایط (م ۱)، (م ۳)، (م ۴)، (م ۵) و (م ۷) رخ نمی دهد. اگر شرط (م ۶)، (م ۸) یا (م ۹) برای (R_2, q, t) برقرار باشد، آن گاه (G_T, s, t) در شرط (م ۱۲)، (م ۱۴)، (م ۱۵)، (م ۱۶) یا (م ۱۷) صدق می کند؛ که تناقض است. ■

قضیه ۱.۴. حالت هایی که در لم های ۱.۴-۴.۴ بیان شده اند کل حالت هایی است که برای (G_T, s, t) رخ می دهد. اثبات: حالت های زیر را در نظر بگیرید.

دادیم که در چه شرایطی بین دو رأس s و t در این گراف‌ها مسیر همیلتونی نداریم. سپس نشان دادیم که اگر (G_T, s, t) سازگار-رنگی باشد و در شرایط ممنوعه قرار نداشته باشد، چگونه می‌توان مسیر همیلتونی بین s و t را در زمان خطی ساخت.

مراجع

- [1] M.R. Garey, D.S. Johnson, "Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness", Freeman, San Francisco, CA, 1979.
- [2] M.S. Rahman and M. Kaykobad, "On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths," Information Processing Letters, vol. 94, no. 1, pp. 37-41, 2005.
- [3] C. Umans and W. Lenhart, "Hamiltonian cycles in solid grid graphs," in Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, pp. 496-505, 1997.
- [4] F. Luccio and C. Mugnia, "Hamiltonian paths on a rectangular chessboard," in Proceedings of the 16th Annual Allerton Conference, pp. 161-173, 1978.
- [5] A. Itai, C.H. Papadimitriou, and J.L. Szwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," SIAM Journal on Computing, vol. 11, no. 4, pp. 676-686, 1982.
- [6] S. D. Chen, H. Shen, and R. Topor, "An efficient algorithm for constructing Hamiltonian paths in meshes," Parallel Computing, vol. 28, no. 9, pp. 1293-1305, 2002.
- [7] A. N. M. Salman, Hajo Broersma, and Edy Tri Baskoro, "Spanning 2-Connected Subgraphs in Alphabet Graphs, Special Classes of Grid Graphs," Journal of Automata, Languages and Combinatorics, vol. 8, no. 4, pp. 675-681, 2003.
- [8] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "Hamiltonian paths in some classes of grid graphs," Journal of Applied Mathematics, vol. 2012, 2012.
- [9] ف. کشاورز کوهجردی و ع. ر. باقری، "مسیره‌های همیلتونی در گراف‌های توری الفبایی T "، پانزدهمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق ایران، ۱۳۹۱.
- [10] T. W. Chang, O. Navrátil, and S. L. Peng, "The end-to-end longest path problem on a mesh with a missing vertex," Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, pp. 59-66, 2015.
- [11] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "Hamiltonian paths in L-shaped grid graphs," Theoretical Computer Science, vol. 621, pp. 37-56, 2016.
- [12] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "A linear-time algorithm for finding Hamiltonian (s, t)-paths in even-sized rectangular grid graphs with a rectangular hole," Theoretical Computer Science, vol. 690, pp. 26-58, 2017.
- [13] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "A linear-time algorithm for finding Hamiltonian (s, t)-paths in odd-sized rectangular grid graphs with a rectangular hole," The Journal of Supercomputing, vol. 73, no. 9, pp. 3821-3860, 2017.
- [14] F. Keshavarz-Kohjerdi and A. Bagheri, "Linear-time algorithms for finding Hamiltonian and longest (s, t)-paths in C-shaped grid graphs," Discrete Optimization, vol. 35, article 100554, 2020.
- [15] M. Hydar, S. Ganes, N. Traore, and W.E. Kevin Yanogo, "A study of end-to-end Longest Path Problem with two missing vertices", National Dong Hwa University CSIE Department, 2017.
- [16] F. Keshavarz-Kohjerdi, Off-line exploration of rectangular cellular environments with rectangular obstacle, Optimization Methods and Software, <https://doi.org/10.1080/10556788.2021.1977811>, 2021.

حالت ۱. $(n - l = 1)$ یا $(k = 1 و n - l > 1)$. آن‌گاه (G_T, s, t) در لم ۱.۴ قرار می‌گیرد.

حالت ۲. $k_2 > 1 و n - l > 1$ باشد.

حالت ۱.۲. $s_x, t_x \leq m - k_2$.

حالت ۱.۱.۲. k_2 زوج باشد.

حالت ۱.۱.۱.۲. $n - l > 2$. آن‌گاه (G_T, s, t) در حالت ۱ از لم ۲.۴ قرار می‌گیرد.

حالت ۲.۱.۱.۲. $n - l = 2$. آن‌گاه (G_T, s, t) در حالت ۲ از لم ۲.۴ قرار می‌گیرد.

حالت ۲.۱.۲. k_2 فرد باشد.

حالت ۱.۲.۱.۲. $s_y, t_y > n - l$. آن‌گاه (G_T, s, t) در حالت ۱ از لم ۳.۴ قرار می‌گیرد.

حالت ۲.۲.۱.۲. $s_y, t_y \leq n - l$. آن‌گاه (G_T, s, t) در حالت ۲ از لم ۳.۴ قرار می‌گیرد.

حالت ۳.۲.۱.۲. $s_y \leq n - l و t_y > n - l$. آن‌گاه (G_T, s, t) در حالت ۳ از لم ۳.۴ قرار می‌گیرد.

حالت ۲.۲. $s_x \leq k_1 و t_x > m - k_2$. آن‌گاه (G_T, s, t) در لم ۴.۴ قرار می‌گیرد.

حالت ۳.۲. $(k_1 + 1 \leq s_x \leq m - k_2 و t_x > m - k_2)$ یا $(s_x, t_x > m - k_2)$. قرینه حالت‌های ۱.۲ و ۲.۲ است. به عبارت دیگر، در این حالت فرض کنید $(1, 1)$ مختصات رأس گوشه سمت راست بالا و $(m, 1)$ مختصات رأس گوشه سمت چپ بالا باشد. ■

بر اساس قضیه ۲.۳ و لم‌های ۱.۴-۴.۴، قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۲.۴. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل با دو رأس متمایز s و t باشد. $HP(G_T, s, t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر s و t سازگار-رنگی باشند و (G_T, s, t) در شرایط (م ۱)، (م ۳) و (م ۱۰) - (م ۱۷) صدق نکند.

قضیه ۳.۴. فرض کنید G_T یک گراف توری T-شکل با دو رأس متمایز s و t باشد. آن‌گاه مسیر همیلتونی بین s و t و دور همیلتونی در زمان خطی بر حسب اندازه گراف ساخته می‌شود.

اثبات: از آنجایی که برای پیدا کردن مسیر همیلتونی بین دو رأس معین s و t در گراف توری G_T از الگوریتم‌های پیدا کردن مسیر همیلتونی در گراف‌های توری مستطیلی و L-شکل استفاده می‌کنیم، بنابراین پیدا کردن مسیر همیلتونی در G_T در زمان خطی انجام می‌شود (بنابر قضیه ۵.۲). ■

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله‌ی مسیر همیلتونی را برای کلاسی از گراف‌ها به نام گراف‌های توری T-شکل مورد بررسی قرار دادیم. ابتدا نشان