

Journal of Soft Computing and Information Technology (JSCIT)

Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

Journal Homepage: jscit.nit.ac.ir

Volume 10, Number 1, Spring 2021, pp. 63-71

Received: 09/07/2019, Revised: 12/29/2020, Accepted: 01/22/2021



Pilot allocation for massive MIMO compressed sensing based channel estimation

Abbas Akbarpour-Kasgari¹, and Mehrdad Ardebilipour^{2*}

1- Department of Electrical and Computer Engineering, KN Toosi University of Technology, Shariati Street, Tehran, Iran.
aakbarpour@mail.kntu.ac.ir, and mehrdad@eetd.kntu.ac.ir

Corresponding author address: Mehrdad Ardebilipour, Department of Electrical and Computer Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, Post Code :1631714191.

Abstract- Massive Multiple-Input Multiple-Output (mMIMO) is a promising approach for the next generation wireless telecommunication systems. In these systems, having a suitable approach for channel estimation is mandatory in order to increase the data rate and spectral efficiency. Distributed Compressed Sensing (DCS) is prominent in extracting joint sparse channel state information (CSI). Here, we have utilized Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) approach to generate quasi-orthogonal pilot sequences, in order to improve the channel estimation approach based on DCS approach. In simulation results, it is represented that ADMM-based pilot sequences are very powerful in extracting CSI of the joint sparse channel ensembles.

Keywords- Compressed sensing, Channel estimation, Joint sparse, Massive Multiple-Input Multiple-Output (mMIMO), Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM), Quasi-Orthogonal Pilot Sequences.

تخصیص پایلوت برای روش‌های تخمین کانال با استفاده از سنجش فشرده در سیستم‌های MIMO انبوه

عباس اکبرپور کاسگری^۱، مهرداد اردبیلی پور^{۱*}

۱- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

aakbarpour@mail.kntu.ac.ir, and mehrdad@eed.kntu.ac.ir

* نشانی نویسنده مسئول: مهرداد اردبیلی پور، تهران، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، کد پستی: ۱۶۳۱۷۱۴۱۹۱

چکیده- سیستم‌های چند-ورودی چند-خروجی انبوه (mMIMO)، سیستم‌هایی بسیار پربازده برای نسل آینده‌ی سیستم‌های مخابراتی هستند. در این سیستم‌ها، داشتن یک روش مناسب برای تخمین کانال به منظور تأمین نرخ بیت بالا و بهره طیفی مناسب، امری ضروری است. سنجش فشرده توزیع یافته (DCS) یک روش اصلی در استخراج اطلاعات حالت کانال تنک توأم می‌باشد. در این مقاله، از روش جهت متناوب چند برابر (ADMM) استفاده می‌شود تا اینکه دنباله‌های پایلوت شبه متعامد ایجاد شود و سپس تخمین کانال بر اساس DCS انجام شود. در نتایج شبیه‌سازی، توانایی دنباله‌های پایلوت که توسط ADMM تولید شده‌اند برای استخراج CSI کانال تنک توأم نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: سنجش فشرده، تخمین کانال، تنک توأم، چند-ورودی چند-خروجی انبوه (mMIMO)، روش جهت متناوب چند برابر (ADMM)، دنباله‌های پایلوت شبه-متعامد

۱- مقدمه

۱. کانال‌های تنک توأم کانال‌هایی هستند که دارای الگوی تنک بودن یکسانی می‌باشند اما ضرایب آنها متفاوت هستند [۳].

طراحی دنباله‌های پایلوت برای بهبود دقت تخمین کانال چالشی مهم در مقابل محققین می‌باشد. به منظور افزایش دقت تخمین کانال در برخی از تحقیقاتی که انجام شده‌اند، طراحی بهینه دنباله‌های پایلوت مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۴-۶]. در موضوع تخمین کانال با استفاده از روش DCS، پایلوت مناسب با بهینه‌سازی خصوصیت ایزومتری محدود شده (RIP)^۲ بدست می‌آید. البته، همدوسی متقابل^۵ به جای RIP بهینه می‌شود چرا که بهینه‌سازی RIP از نظر محاسباتی نشدنی می‌باشد. همدوسی متقابل برای یک ماتریس مانند $A_{m \times n}$ بصورت زیر تعریف می‌شود

تقاضای نرخ زیاد داده در شبکه‌های ارتباطی آینده باعث شده است در استانداردهای مخابراتی پیش رو همواره به دنبال روش‌هایی امیدوارکننده برای تحقق این موضوع باشند. یکی از این روش‌های امیدوارکننده تکنولوژی چند-ورودی چند-خروجی انبوه یا به اصطلاح mMIMO^۱ می‌باشد که از آنتن‌های زیاد در ایستگاه پایه (BS) برای ارسال و دریافت اطلاعات استفاده می‌کند. برای اینکه بتوانیم دسترسی به اطلاعات را در گره‌های بی‌سیم میسر کنیم، اطلاعات کانال باید حداقل در گره‌های گیرنده وجود داشته باشند. بدین منظور از رفتار تنک توأم^۲ کانال mMIMO تحت عنوان سنجش فشرده توزیع یافته (DCS)^۲ برای تخمین کانال استفاده می‌شود [۱-۴].

$$\mu(A) = \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{|\langle a_i, a_j \rangle|}{\|a_i\|_2 \|a_j\|_2} \quad (1)$$

می‌باشد. یافتن این دنباله‌ها کمی دشوار است، اما دنباله‌های شبه متعامد که هر دو مشخصه مهم آنها (تابع خودهمبستگی و تابع همدوسی متقابل) نزدیک به حالت بهینه هستند را می‌توان با عملیات ریاضی پیدا کرد که به آنها دنباله‌های شبه بهینه می‌گویند. در این مقاله سعی شده است با استفاده از روش جهت متناوب چندبرابر (ADMM) دنباله‌های شبه‌بهینه را پیدا کنیم. با استفاده از ADMM مسئله مینیمم‌سازی دنباله‌های با همدوسی متقابل فرموله شده است و تابع لاگرانژ آن استخراج شده‌اند. سپس یک الگوریتم بازگشتی طراحی شده است تا اینکه تابع لاگرانژ بدست آمده را بهینه کند و دنباله‌های مناسب استخراج شوند. برتری روش پیشنهادی در این مقاله، نسبت به [۸] این است که هیچ بخشی از پایلوت‌ها را بصورت متعامد تخصیص نمی‌دهد، لذا میزان کاهش تعداد زیرحامل‌ها برای تخصیص پایلوت بیشتر می‌باشد. از طرفی، نسبت به مقاله [۹] نیز، روش پیشنهادی این مقاله نتیجه بهتری خواهد داشت، چرا که از روش‌های بهینه‌سازی احتمالاتی که ممکن است در مینیمم محلی گرفتار شوند، استفاده نشده است. ادامه مقاله به این صورت تدوین شده است که در بخش دوم مدل سیستم ارائه شده است و مسئله بصورت ریاضی مدل شده است. در بخش سوم الگوریتم پیشنهادی برای دنباله‌های پایلوت شبه‌متعامد معرفی شده است. نتایج شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری از مقاله نیز در بخش‌های چهارم و پنجم ارائه شده‌اند.

۲- مدل سیستم و بیان ریاضی مسئله

۲-۱- مدل سیستم

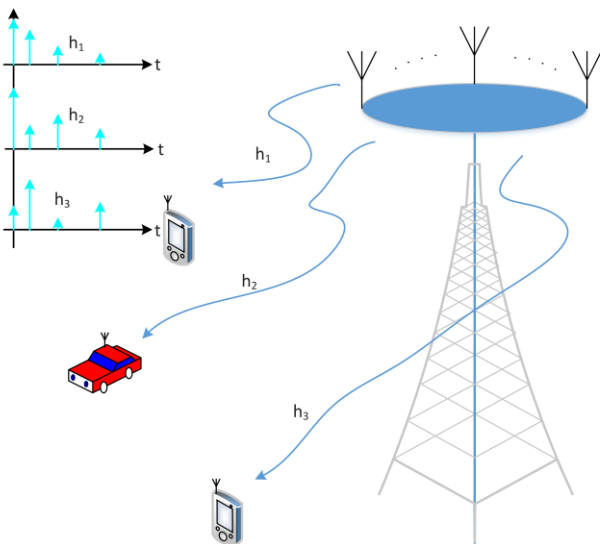
یک سیستم ایستگاه پایه \mathcal{A} را در نظر بگیرید که دارای N_R آنتن ارسال و دریافت می‌باشد و یک کاربر تک آنتنه \mathcal{B} را نیز در نظر می‌گیریم. در ایستگاه پایه از سیگنالینگ OFDM روی u امین آنتن که $u = 0, 1, \dots, N_R$ است، برای تبادل اطلاعات با سایر کاربران استفاده می‌شود. سمبل OFDM ارسال از طرف ایستگاه پایه، با استفاده از N زیرحامل که به اندازه Δf از هم فاصله دارند ساخته شده است که دارای پیشوند دوری (CP) به طول N_G نیز می‌باشد. سیگنال دریافتی توسط گیرنده با عبور از کانال فرکانس‌گزین بدست آمده است که می‌توان آن را با استفاده از یک فیلتر با پاسخ ضربه محدود (FIR) نمایش داد که از چندین مسیر تشکیل شده است. با حذف CP و با گرفتن تبدیل فوریه از مابقی نمونه‌های زمانی سیگنال دریافتی، پایلوت‌ها استخراج می‌شوند. بنابراین، سیگنال دریافتی در زیرحامل m امین پایلوت را می‌توان بصورت زیر نمایش داد

$$y_u(n) = \sum_{l=0}^{L-1} x(p_{ul}(n)) h_{ul}(l) e(l, u, n) + w_{ul}(n) \quad (2)$$

که در این رابطه a_i ستون i ام از ماتریس بوده و عبارت صورت نشان دهنده ضرب داخلی و عبارت مخرج معرف اندازه هر ستون می‌باشد [۷]. دو نوع تعامد می‌توان در تخصیص پایلوت‌ها در نظر گرفت. نوع اول استفاده از مکان پایلوت‌ها است [۵] و نوع دوم از همبستگی دنباله‌های پایلوت بدست می‌آید. دسته دوم را در این مقاله پایلوت-های شبه متعامد می‌نامیم که به آن پرداخته خواهد شد. از آنجایی که تعداد آنتن‌های mMIMO بسیار زیاد است، تولید دنباله‌های متعامد با توجه مکان پایلوت‌ها از نظر طیفی کم‌بازده و از نظر منابع مصرفی پرمصرف می‌باشد. در نتیجه، تولید دنباله‌های شبه متعامد در mMIMO بسیار مورد توجه می‌باشد.

با توجه به اینکه استفاده از DCS در تخمین کانال سیستم‌های MIMO-OFDM، میزان استفاده از زیرحامل‌های پایلوت را کاهش می‌دهد، در این سیستم‌ها چندان به تخصیص پایلوت شبه متعامد به منظور کاهش بیشتر استفاده از منابع توجهی نشده است. از این میان، در [۵] به موضوع تخصیص پایلوت در سیستم‌های MIMO-OFDM پرداخته شده است. به منظور طراحی پایلوت بهینه، مسئله بصورتی مدل شده است که مکان پایلوت‌ها مهم بوده است. سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک مکان‌های بهینه استخراج شده‌اند. در [۷] مسئله تخصیص پایلوت برای سیستم‌های OFDM مدل شده است و علاوه بر مکان پایلوت، توان آنها نیز بهینه شده است.

با توجه به بررسی‌هایی که انجام شده است، تخصیص پایلوت شبه متعامد سیستم‌های mMIMO-OFDM که تخمین کانال در آنها با استفاده از DCS انجام می‌شود، چندان مورد بررسی قرار نگرفته است. در [۸] این موضوع را به دو قسمت تقسیم کرده است. ابتدا آنتن‌ها را در چند گروه تقسیم‌بندی کرده است و سپس پایلوت‌های گروه‌های مختلف را متعامد انتخاب کرده در حالی که در یک گروه مکان پایلوت‌ها بدون بهینه‌سازی غیرمتعامد انتخاب شده‌اند. علاوه بر این نویسندگان [۹] نیز به این موضوع پرداخته‌اند که برای بهینه‌سازی از رویکردهای احتمالی استفاده شده است و بصورت تصادفی مجموعه اولیه پایلوت را تولید کرده و سپس با استفاده از بهینه‌سازی‌های عددی این مجموعه تصادفی را به سمت مجموعه بهینه همگرا می‌کنند. این روش‌ها با توجه به حدس اولیه تصادفی، ممکن است در مینیمم محلی گرفتار شوند. در این مقاله نشان داده شده است که طراحی دنباله‌های بهینه می‌تواند به تولید دنباله‌های پایلوت با رفتار همبستگی بهینه مدل شود. به عبارت دیگر، همبستگی بهینه در چند دسته دنباله، دنباله‌هایی هستند که تابع خود همبستگی آنها شبیه به تابع دلتای دیراک می‌باشد و همدوسی متقابل آنها صفر



شکل ۱: مدل سیستم مورد مطالعه

۳-۱- حل مسئله تخمین کانال و طراحی پایلوت مناسب

برای تخمین کانال باید بتوانیم از رابطه (۴) مقدار بردار \mathbf{h} را مشخص کنیم. با داشتن اطلاعات آماری کانال، تخمین کمترین میانگین مربع خطا (MMSE) جواب بهینه برای این عبارت خواهد بود. برای حل این مسئله با استفاده از مفاهیم سنجش فشرده که تنگ بودن کانال را به عنوان پیش شرط نیاز دارد، مسئله پیدا کردن \mathbf{h} بهینه بصورت مسئله بهینه‌سازی زیر تعریف می‌شود:

$$\min \|\mathbf{h}\|_1 \quad (6)$$

$$\text{s. t. } \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{h}\|^2 \leq \varepsilon$$

در این مسئله $\|\cdot\|_1$ نرم l_1 بردار می‌باشد. حل این مسئله بهینه‌سازی منجر به الگوریتم‌های مختلفی از نوع حریصانه و غیرحریصانه شده است که چند نمونه از آنها در [۱۰-۱۳] آمده‌اند.

یکی از مهمترین مسائلی که در کیفیت تخمین کانال تأثیرگذار است، داشتن پایلوت مناسب برای اندازه‌گیری از کانال در زمان‌ها و فرکانس‌های مناسب می‌باشد. این امر کمک می‌کند تا اینکه اندازه‌گیری دقیق‌تری از کانال به گیرنده برسد و گیرنده نیز با استفاده از عملیات پردازشی مناسب تخمین دقیقی ارائه دهد. در این ادبیات، کانال توسط ماتریس اندازه‌گیری مورد سنجش قرار می‌گیرد، بنابراین برای اینکه پایلوت مناسبی برای تخمین کانال طراحی کنیم باید بتوانیم ماتریس اندازه‌گیری را به خوبی طراحی کنیم.

دقت بازسازی در سنجش فشرده براساس هم‌دوسی متقابل ماتریس اندازه‌گیری بیان می‌شود. هم‌دوسی متقابل که با $\mu(\Phi)$ نمایش داده می‌شود را می‌توان بصورت ماکزیمم مقدار ضرب داخلی دو ستون متمایز از ماتریس اندازه‌گیری بصورت زیر نشان داد.

که در آن $n = 0.1 \dots N_p - 1$ اندیس پایلوت، $l = 0, 1, \dots, L - 1$ اندیس مسیر و $e(l, u, n) = e^{-j2\pi l p_u(n)/N}$ می‌باشند. علاوه بر این، نشان دهنده مکان m امین پایلوت از آنتن ارسالی u می‌باشد و همین‌طور $x(p_u(n))$ مقدار آن می‌باشد و $w_u(n)$ امین نمونه از نویز سفید گوسی جمع‌شوند در آنتن u را نشان می‌دهد که دارای میانگین صفر و واریانس σ_w^2 می‌باشد. همچنین، $h_u(l)$ نشان دهنده ضریب مسیر l ام از کانال بین u امین آنتن ارسالی و آنتن گیرنده می‌باشد. نمایش برداری این رابطه می‌توان بصورت زیر نمایش داد

$$\mathbf{y}_u = \Phi_u \mathbf{h}_u + \mathbf{w}_u \quad (3)$$

که در آن $\mathbf{y}_u = [y_u(0), y_u(1), \dots, y_u(N_p - 1)]$ دریافتی،

$$\Phi_u = \text{diag}\{x_u\} F_u \quad (4)$$

ماتریس اندازه‌گیری با $x_u = [x_u(0), x_u(1), \dots, x_u(N_p - 1)]^T$ دنباله پایلوت ارسالی و F_u ماتریس تبدیل فوریه جزئی با N_p سطر متناظر با N_p مکان پایلوت و L ستون اول از ماتریس تبدیل فوریه کلی می‌باشد؛ $\mathbf{h}_u = [h_u(0), h_u(1), \dots, h_u(L - 1)]^T$ بردار ضریب کانال و $\mathbf{w}_u = [w_u(0), w_u(1), \dots, w_u(N_p - 1)]^T$ بردار نویز دریافتی است. علاوه بر این، در این فرمول‌بندی بالانویس $(\cdot)^T$ علامت ترانهاده و $\text{diag}\{x\}$ نشان‌دهنده ماتریس قطری با بردار x به عنوان قطر اصلی آن است. شمای کلی این سیستم در شکل ۱ آمده است.

۲-۲- بیان ریاضی مسئله

برای اینکه همه نمونه‌های مختلف کانال را در دو گره ارسال و دریافت پوشش دهیم، پایلوت‌ها را در یک بردار واحد به نام $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_p \times 1}$ جمع‌آوری می‌کنیم که رابطه آن برابر است با

$$\mathbf{y} = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{N_A}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{N_A} \end{bmatrix} + \mathbf{w} \quad (5)$$

$$= \Phi \mathbf{h} + \mathbf{w}$$

که در آن $\Phi \in \mathbb{C}^{N_p \times LN_A}$ ماتریس اندازه‌گیری را نشان می‌دهد و $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{LN_A \times 1}$ و $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{LN_A \times 1}$ بردارهای کانال کلی و نویز کلی می‌باشند. بر طبق روابط قبلی می‌توان هر کدام از Φ_u ها را برای $u = 1, 2, \dots, N_A$ بصورت حاصل ضرب دنباله پایلوت متناظر در ماتریس تبدیل فوریه جزئی نمایش داد.

پایلوت نیاز باشد، در حالتی که ۲۵۶ زیرحامل برای ارسال داریم، فقط برای ۱۶ آنتن می‌توان زیرحامل متعامد در نظر گرفت در حالی که هیچ اطلاعاتی نیز ارسال نشود. با توجه به این موضوع، در این مقاله سعی کردیم تا با استفاده از همدوسی متقابل و تعریف آن براساس ماتریس Gram مسئله را بصورت مسئله بهینه‌سازی محدب مدل کرده و آن را حل کنیم تا اینکه به دنباله‌های پایلوت بهینه برای آنتن‌های مختلف برسیم.

۴- روش پیشنهادی تخصیص پایلوت شبه‌متعامد

معادله (۳) را می‌توان بصورت حاصل ضرب هادامارد دنباله پایلوت و ماتریس فوریه جزئی بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\Phi_u = P_u \odot F \quad (10)$$

که در آن $P_u = \text{diag}\{x_u\}I_u$ می‌باشد و $I_u = \mathbf{1}^T$ بردار تمام یک است. در نتیجه، ماتریس اندازه‌گیری کلی را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\Phi = P \odot \tilde{F} \quad (11)$$

که در آن $P = [p_1, \dots, p_{N_A}]$ و $I = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_{N_A}\}$ می‌باشد. علاوه بر این، $\tilde{F} = FJ$ است که $J = [J_1, J_2, \dots, J_{N_A}] \in \mathbb{Z}^{L \times LN_A}$ می‌باشد و J_u ماتریس $L \times L$ واحد است.

به منظور داشتن یک ماتریس اندازه‌گیری مناسب، باید مقدار همدوسی متقابل آن حداقل مقدار ممکن باشد. علاوه بر این، مینیمم کردن همدوسی متقابل برابر با تولید ماتریس Gram از ماتریس اندازه‌گیری Φ است که برابر با ماتریس واحد می‌باشد. این موضوع را می‌توان بصورت زیر مدل کرد

$$\min_p \mu\{\Phi\} = \min_p \|G\{\Phi\} - LI\|^2 \quad (12)$$

که در آن $G\{\Phi\} = \Phi^H \Phi$ ماتریس Gram می‌باشد. شرایطی وجود دارند که باید ذکر شوند. مهمترین آنها توان پایلوت‌ها می‌باشند. در اینجا، همه پایلوت‌ها را با توان یکسان در نظر می‌گیریم تا اینکه بتوانیم با مشکل نسبت توان ماکزیمم به توان متوسط (PAPR)^۸ مقابله کنیم. در نتیجه، طراحی پایلوت‌های بهینه برابر با مسئله مینیمم‌سازی زیر می‌باشد

$$\min_p \| \Phi^H \Phi - LI \|^2 \quad \text{st } |x_u(n)| = 1 \quad (13)$$

علاوه بر این، این مسئله بهینه‌سازی روی توان پایلوت‌ها نرمالیزه شده است تا اینکه مسئله ساده‌تر شود.

برای حل مسئله بهینه‌سازی در معادله (۸)، از روش پیشنهادی براساس ADMM استفاده شده است. بدین منظور، اولین نمونه از همه پایلوت‌ها را بصورت جواب بدیهی ۱ فرض می‌کنیم [۱۹]. به عبارت دیگر، $x_u(0) = 1$ برای $u = 1, 2, \dots, N_A$ می‌باشد. در نتیجه ماتریس اندازه‌گیری برابر است با

$$\mu(\Phi) = \max_{\substack{1 \leq m, n \leq L \\ m \neq n}} \frac{|\langle \Phi(n), \Phi(m) \rangle|}{\|\Phi(n)\|_2 \|\Phi(m)\|_2} \quad (7)$$

که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی دو بردار و $\Phi(n)$ و $\Phi(m)$ ستون n م و m م از ماتریس اندازه‌گیری می‌باشد و $\|\cdot\|_2$ نرم ۲ بردار می‌باشد. با توجه به تشکیل ماتریس اندازه‌گیری از روی پایلوت‌ها و مکان آنها می‌توان مقدار $\mu(\Phi)$ را بصورت زیر بیان کرد

$$\mu(\Phi) = \max_{\substack{1 \leq m, n \leq L \\ m \neq n}} \frac{\left| \sum_{k=1}^{N_p} |x(k)|^2 e^{-j2\pi k(m-n)/N} \right|}{\sum_{k=1}^{N_p} |x(k)|^2} \quad (8)$$

که در آن $k \in \Gamma$ ماتریس شامل کلیه پایلوت‌ها، می‌باشد.

در طرح‌هایی که تاکنون برای پایلوت پیشنهاد شده است، برای جلوگیری از تداخل پایلوت‌های آنتن‌های مختلف، از تعامد زیرحامل‌ها استفاده شده است. البته باید توجه داشت که این کار در حالت MIMO انبوه چندان نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد چرا که با افزایش تعداد آنتن‌های ارسال، زیرحامل‌های محدود با کمبود مواجه می‌شوند. چرا که باید به ازای هر آنتن از یک دنباله پایلوت جدید استفاده کرد که با افزایش تعداد آنتن‌ها از تعداد ممکن زیرحامل فراتر خواهد رفت. بدین منظور با توجه به اینکه توان زیرحامل‌ها چندان مهم نمی‌باشد [۱۱]، به منظور ایجاد سادگی در حل مسئله بهینه‌سازی کلیه زیرحامل‌های پایلوت را هم توان فرض کرده و بدین ترتیب همدوسی متقابل را بصورت زیر نشان می‌دهند.

$$\mu(\Phi) = \max_{\substack{1 \leq m, n \leq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{N_p} \sum_{l=1}^{N_p} e^{-j2\pi k(m-n)/N} \quad (9)$$

که این رابطه با فرض هم‌توانی زیرحامل‌های پایلوت استخراج شده است. واضح است که مقدار همدوسی متقابل به مکان زیرحامل‌های پایلوت بستگی دارد، بنابراین الگوریتم‌هایی که برای بهینه‌سازی استفاده می‌شوند سعی می‌کنند بصورت عددی مکان‌هایی را بیابند که دارای همدوسی متقابل اندکی باشند. از طرفی می‌توان همدوسی متقابل را با بیشترین مقدار خارج قطر اصلی ماتریس Gram که بصورت $G\{\Phi\} = \Phi^H \Phi$ [۱۵ و ۱۴] تعریف می‌شود در نظر گرفت. در واقع برای اینکه بتوانیم ماتریس اندازه‌گیری مناسبی داشته باشیم باید بتوانیم ماتریس اندازه‌گیری را به گونه‌ای طراحی کنیم که $G\{\Phi\}$ تا حد امکان به ماتریس یکانی نزدیک باشد.

طبق تئوری CS، هر قدر همدوسی متقابل کوچکتر باشد، سیگنال تنک بازسازی شده نیز دقیق‌تر می‌باشد [۱۸-۱۶]. بنابراین، ماتریس اندازه‌گیری Φ با همدوسی متقابل کوچکتر می‌تواند بازسازی دقیق‌تری را نشان دهد، به عبارتی می‌توان با انتخاب مناسب مکان‌های پایلوت کارایی تخمین کانال تنک را بهبود داد.

همانگونه که توضیح داده شد، در سیستم‌های MIMO انبوه چندان نمی‌توان مکان پایلوت‌های آنتن‌های مختلف را نسبت به هم متعامد انتخاب کرد، چرا که اگر به عنوان مثال تعداد ۱۶ زیرحامل برای هر

۴-۱- الگوریتم پیشنهادی حل مسئله

مرحله ۱: ابتدا با داشتن $\{\bar{P}(k), \Lambda(k)\}$ از مرحله قبل مقدار

$$\bar{Q}(k+1) = \arg \min_{\bar{Q}} \text{trace}\{\bar{Q}^H \odot \bar{D}_F \odot \bar{Q} + (\Lambda^T + \eta I)(\bar{Q} - \bar{P})\} \quad (21)$$

برای بهینه سازی می توانیم به راحتی با مشتق گیری مقدار بهینه $\bar{Q}(k+1)$ را بصورت زیر بدست آوریم

$$\bar{Q}(k+1) = -\bar{D}_F^+ (\Lambda^T + \eta I) \quad (22)$$

که در آن \bar{D}_F^+ هرمیتین ماتریس معکوس عددی ماتریس \bar{D}_F تعریف می کنیم که مقادیر درایه های آن از معکوس کردن هر کدام از درایه های ماتریس \bar{D}_F و در نهایت هرمیتین کل ماتریس بدست می آید.

مرحله ۲: سپس با داشتن $\{\bar{Q}(k+1), \Lambda(k)\}$ می توانیم مقدار $\bar{P}(k+1)$ را با استفاده از مسئله مینیمم سازی زیر بدست آوریم.

$$\begin{aligned} \bar{P}(k+1) &= \arg \min_{\bar{P}} \mathcal{L}(\bar{Q}(k+1), \Lambda(k)) \\ &= \arg \min_{\bar{P}} \text{trace}\{-(\Lambda^T(k) + 2\eta \mathbf{Q}^H(k+1))\bar{P}(k)\} \\ &\quad \text{s.t. } |x_u(n)| = 1 \end{aligned} \quad (23)$$

برای حل این مسئله همانگونه که می بینیم، با توجه به قیدی که داریم می توانیم برای هر n بصورت جداگانه این مسئله بهینه سازی را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} \min_{x_u(n)} \alpha_u(n)p_{u,r}(n) + \beta_u(n)p_{u,i}(n) \\ p_{u,r}^2(n) + p_{u,i}^2(n) = 1 \end{aligned} \quad (24)$$

با توجه به این رابطه می توان تابع لاگرانژ را برای آن بصورت زیر تعیین کرد

$$\mathcal{L}_n = \alpha_u(n)p_{u,r}(n) + \beta_u(n)p_{u,i}(n) + \xi_n(p_{u,r}^2(n) + p_{u,i}^2(n) - 1) \quad (25)$$

در این رابطه ξ_n ضرایب لاگرانژ می باشد و همچنین اگر $\mathbf{Z}(k) = -(\Lambda^T(k) + 2\eta \mathbf{Q}^H(k+1))$ باشد، آنگاه $\alpha_u(n) = \mathbf{Z}_{u,n}(k)$ و $\beta_u(n) = \mathbf{Z}_{u,2N-1+n}(k)$ می باشد و اندیس های u و n به ترتیب نشان دهنده سطر u ام و ستون n ام از ماتریس $\mathbf{Z}(k)$ می باشند. با توجه به این روابط می توانیم مقدار درایه های ماتریس را بصورت زیر بدست آوریم

$$\begin{aligned} p_{u,r}(n) &= -\frac{\alpha_u(n)}{2\xi_n} \\ p_{u,i}(n) &= -\frac{\beta_u(n)}{2\xi_n} \\ \xi_n &= -\frac{\sqrt{\alpha_u(n)^2 + \beta_u(n)^2}}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

مرحله ۳: در مرحله آخر با توجه ماتریس های $\bar{Q}(k+1)$ و $\bar{P}(k+1)$ می توانیم مقدار ماتریس ضرایب لاگرانژ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T \\ \bar{P} \end{pmatrix} \odot \bar{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^H \\ \bar{P} \odot \bar{F} \end{pmatrix} \quad (14)$$

بنابراین، مسئله بهینه سازی را به صورت زیر می توان نوشت

$$\begin{aligned} \min_{\bar{P}} \text{trace}\{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_1^H + \bar{P}^H \odot \bar{F}^H \bar{P} \odot \bar{F} - LI\} \\ \text{s.t. } |x_u(n)| = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

با تعریف ماتریس جدید $\bar{D}_F = \bar{F}^H \bar{F}$ و با توجه به خاصیت توزیع پذیری ضرب هادامارد، مسئله بهینه سازی بصورت زیر قابل بیان است

$$\begin{aligned} \min_{\bar{P}} \text{trace}\{\bar{P}^H \odot \bar{D}_F \odot \bar{P}\} \\ \text{s.t. } |x_u(n)| = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

مسئله (۱۶) محدب نیست و برای اینکه مسئله را بتوانیم حل کنیم از تکنیک تقسیم متغیر استفاده کرده [۲۰] و متغیر کمکی $\bar{Q} = \bar{P}$ را تعریف کرده و حال آن را به مسئله بهینه سازی اضافه می کنیم تا اینکه بصورت زیر قابل بیان باشد

$$\begin{aligned} \min_{\bar{P}, \bar{Q}} \text{trace}\{\bar{Q}^H \odot \bar{D}_F \odot \bar{Q}\} \\ \text{s.t. } \bar{Q} = \bar{P} \\ |x_u(n)| = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

از آنجایی که الگوریتم ADMM برای اعداد حقیقی بیان شده است، باید بتوانیم مسئله بهینه سازی بدست آمده در معادله (۱۲) را با استفاده از بخش های حقیقی و موهومی جداگانه، بصورت ماتریس های جداگانه و بصورت اعداد حقیقی بنویسیم. با تعریف ماتریس های جدا می توانیم این مسئله بهینه سازی را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{P}, \bar{Q}} \text{trace}\{\bar{Q}^H \odot \bar{D}_F \odot \bar{Q}\} \\ \text{s.t. } \bar{Q} = \bar{P} \\ p_{u,r}^2(n) + p_{u,i}^2(n) = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

که در این معادله داریم:

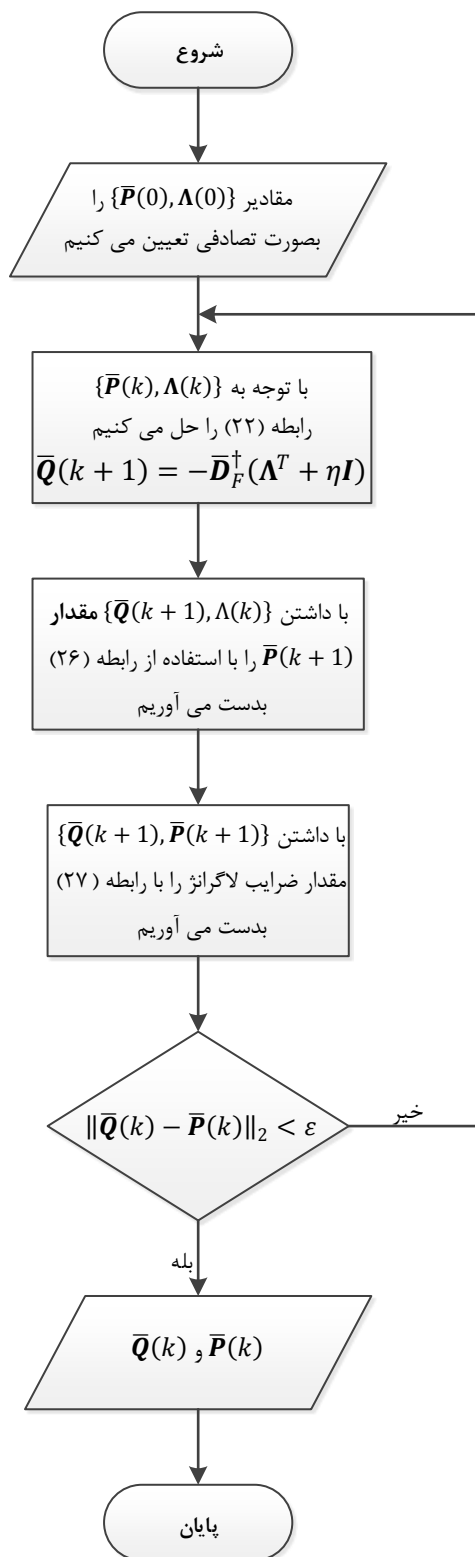
$$\begin{aligned} \bar{D}_F &= \begin{pmatrix} 2\mathcal{R}\{\hat{F}^T\}\mathcal{R}\{\hat{F}\} & 0 \\ 0 & 2\mathcal{I}\{\hat{F}^T\}\mathcal{I}\{\hat{F}\} \end{pmatrix} \\ \bar{Q} &= [\mathcal{R}\{\bar{Q}^T\} \quad \mathcal{I}\{\bar{Q}^T\}]^T \\ \bar{P} &= [\mathcal{R}\{\bar{P}^T\} \quad \mathcal{I}\{\bar{P}^T\}]^T \\ p_{u,r}(n) &= \mathcal{R}\{p_u(n)\} \\ p_{u,i}(n) &= \mathcal{I}\{p_u(n)\} \end{aligned} \quad (19)$$

که در این رابطه ها، \mathcal{R} و \mathcal{I} معرف بخش های حقیقی و موهومی هستند.

حال مسئله را می توان با استفاده از مراحل الگوریتم ۱ که در ادامه آمده است، بهینه کرد. از آنجایی که قید آخر در مسئله (۱۷) فقط در بدست آوردن مقادیر \bar{P} مهم است، آن را می توانیم حذف کنیم و در مرحله محاسبه \bar{P} اضافه کنیم. با این فرض، می توان تابع لاگرانژ مسئله بهینه سازی را بصورت زیر تعریف کرد

$$\mathcal{L} = \text{trace}\{\bar{Q}^H \odot \bar{D}_F \odot \bar{Q} + \Lambda^T(\bar{Q} - \bar{P})\} + \eta \text{trace}\{(\bar{Q} - \bar{P})^H(\bar{Q} - \bar{P})\} \quad (20)$$

که در آن η برای هر مرحله الگوریتم ثابت و Λ ماتریس قطری ضرایب لاگرانژ می باشد. مراحل حل این معادله با توضیح در ادامه آورده شده اند.



شکل ۲: الگوریتم تولید دنباله‌های شبه متعامد پیشنهادی

$$NMSE = \sum_{n=1}^{N_{MC}} \frac{\|\hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{h}_n\|_2}{\|\mathbf{h}_n\|_2} \quad (27)$$

که در آن $\hat{\mathbf{h}}_n$ تخمین کانال بدست آمده در مرحله n ام از N_{MC} آزمایش می‌باشد.

$$\Lambda(k+1) = \Lambda(k) + \eta(\bar{\mathbf{Q}}(k+1) - \bar{\mathbf{P}}(k+1)) \quad (27)$$

مراحل ۱ تا ۳ تکرار می‌شوند تا اینکه فاصله بین دو ماتریس $\bar{\mathbf{Q}}(k)$ و $\bar{\mathbf{P}}(k)$ به مقداری اندک برسد یا اینکه از یک مقدار مشخص شده مانند ϵ کوچکتر باشد، $\|\bar{\mathbf{Q}}(k) - \bar{\mathbf{P}}(k)\|_2 < \epsilon$. این الگوریتم بصورت مرحله به مرحله نیز در شکل ۲ آمده است.

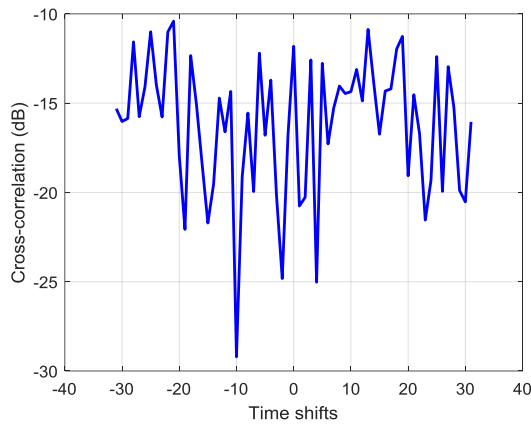
۵- نتایج شبیه‌سازی

به منظور شبیه‌سازی، ابتدا یک سیستم MIMO از جوه با تعداد مختلفی از آنتن را در نظر گرفتیم. در این سیستم برای اینکه بتوانیم کارایی الگوریتم پیشنهادی بررسی کنیم ابتدا میزان تابع خودهمبستگی برای چند دنباله نمونه را ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از دنباله‌های تولید شده و به کمک الگوریتم‌های بازسازی مختلّف از جمله StFBP و ASSP [۱۲ و ۲۱] که الگوریتم‌های بازسازی سیگنال‌های تنک بصورت توزیع یافته می‌باشند و از تنک بودن بلوکی کانال نیز استفاده می‌کنند، عمل تخمین کانال را انجام داده‌ایم و نتایج آن را ارائه داده‌ایم.

در این شبیه‌سازی از سیستم OFDM با ۱۰۲۴ زیرکانال استفاده شده است که این دنباله‌ها در فاصله $\Delta f = 15 \text{ KHz}$ از هم قرار گرفته‌اند. بنابراین کل پهنای باندی که سیستم OFDM پوشش داده است برابر با 1.68 MHz است که به صورت تقریبی پهنای باند این سیستم را روی $BW = 8 \text{ MHz}$ در نظر بگیریم. کانالی که در این جا در نظر گرفته شده است نیز کانال پیاده‌روی گسترش یافته A یا EPA از روی استاندارد LTE-A می‌باشد [۲۲]. دنباله‌های اطلاعات نیز با استفاده از مدولاسیون 16-QAM نگاشت شده‌اند. همه نتایج شبیه‌سازی‌ها نیز از روی میانگین‌گیری بر روی ۲۰۰۰ اجرا بر روی کانال‌های مستقل ارائه شده‌اند. در مرحله آشکار سازی نیز پس از تخمین کانال از گیرنده اعمال صفر (zero-forcing) استفاده می‌شود.

به منظور مقایسه نتایج تخمین کانال نیز از میانگین مربع خطا نرمالیزه (NMSE) استفاده شده است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

۵-۱- نتایج شبیه‌سازی برای دنباله‌های تولید شده



شکل ۵: هم‌دوسی متقابل دو دنباله ایجاد شده

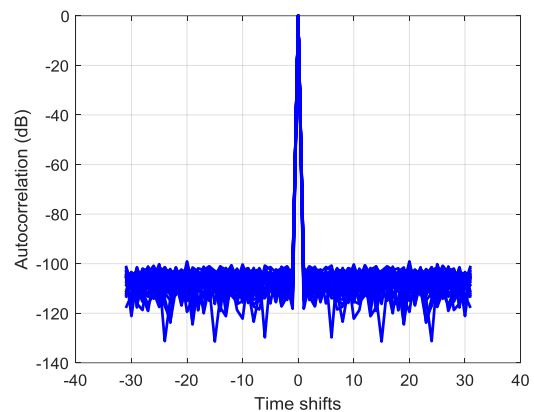
۵-۲- نتایج شبیه‌سازی برای تخمین کانال

همانگونه که پیش از این توضیح داده شد، به منظور ارزیابی کارایی دنباله‌های تولید شده به منظور پایلوت از شبیه‌سازی یک سیستم MIMO انبوه استفاده شده است. در این سیستم، از ۱۰۲۴ زیرحامل برای OFDM استفاده شده است که از این تعداد برای هر آنتن تعداد ۲۰ زیرحامل برای پایلوت در نظر گرفته شده است. برای این مقایسه از دو دسته الگوریتم بازسازی استفاده شده است که روش‌های StFBP و ABSP می‌باشند. از طرفی برای هر کدام از روش‌ها از دو دسته تخصیص پایلوت استفاده شده است. ابتدا از پایلوت متعامد استفاده شده است که این تعامد در حوزه زیرحامل‌ها ایجاد شده است و دنباله‌های زیرحامل‌های مختلف برای هر آنتن ارائه شده‌اند. در حالت دوم نیز از دنباله‌های پیشنهادی استفاده شده است. واضح است که با استفاده از دنباله‌های پایلوت متعامد در واقع از تعداد زیرحامل‌هایی که برای ارسال اطلاعات وجود دارد، کاسته می‌شود. اما در حالت پیشنهادی زیرحامل‌های بیشتری برای ارسال اطلاعات وجود دارد. این موضوع یکی از برتری‌های روش پیشنهادی است که در این مقاله به دنبال آن بوده‌ایم و بدین ترتیب می‌توانیم بازدهی طیفی را بهبود دهیم.

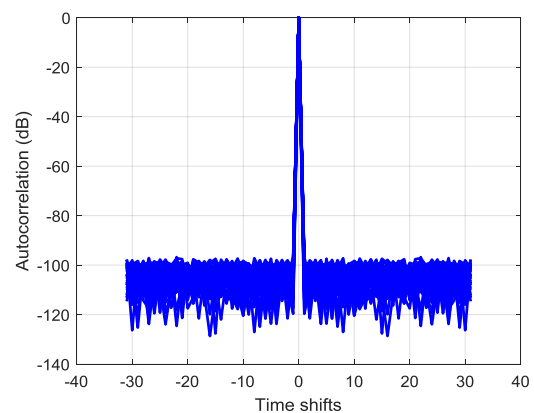
نتیجه‌های بدست آمده از شبیه‌سازی‌ها در شکل ۶ و شکل ۷ ارائه شده‌اند. همانگونه که مشخص است، روش استفاده از دنباله‌های شبه‌متعامد نسبت به روش دنباله متعامد فاصله کمی دارد و به راحتی می‌توان دید که این فاصله چندان زیاد نیست. به عنوان مثال در معیار NMSE این فاصله در حد 1.5 dB می‌باشد و در معیار BER نیز این فاصله در حد 0.5 dB می‌باشد. البته استفاده از روش دیگری برای بازسازی نشان داده است که در روش‌های دیگر بازسازی که براساس الگوریتم‌های حریصانه رفتار می‌کنند، روش پیشنهادی نتیجه مناسبی را ارائه می‌کند.

در این قسمت به منظور ایجاد دنباله‌های پایلوت پی‌شهادی دو حالت $N_p = 32$ و $N_A = 32, 64$ آنتن را در نظر گرفتیم. در این شبیه‌سازی ما مقدار ϵ نیز برابر با 0.01 فرض شده است. نتایج تابع خودهمبستگی این دنباله‌ها در ادامه در شکل‌های ۳ و ۴ آمده‌اند. همانگونه که مشخص است، طول هر کدام از دنباله‌ها برابر با ۳۲ می‌باشد و نتایج نیز برای کیفیت‌های زمانی مختلف رسم شده‌اند. با افزایش تعداد آنتن‌ها، خودهمبستگی دنباله‌ها نیز به میزان بسیار اندکی بدتر می‌شود. که البته این موضوع طبیعی می‌باشد.

علاوه بر تابع خودهمبستگی دنباله‌های تولید شده، نیاز به تابع هم‌دوسی متقابل نیز داریم تا این که بتوانیم در مورد تعامد دنباله‌های ایجاد شده نیز بحث کنیم. به همین منظور دو دنباله نمونه از دنباله‌های ایجاد شده را انتخاب کرده و از این میان تابع هم‌دوسی متقابل را برای این دو دنباله نمونه رسم کرده‌ایم که در شکل ۵ آمده است.



شکل ۳: تابع خودهمبستگی برای $N_A = 32$ آنتن



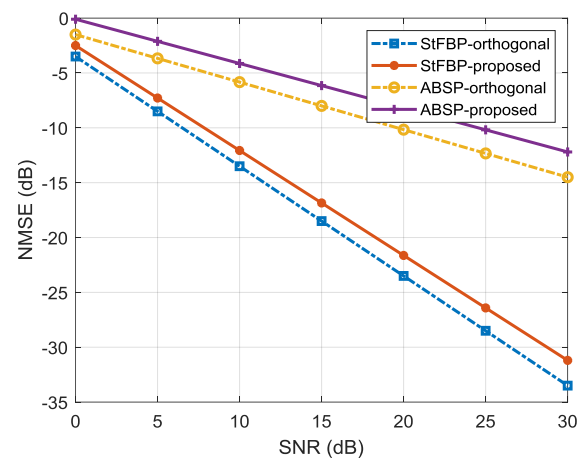
شکل ۴: تابع خود همبستگی برای $N_A = 64$ آنتن

شبه متعامد استفاده کرده و منابع مورد استفاده را کاهش دهیم. روش پیشنهادی از روی می‌نیم‌سازی مقدار همدوسی متقابل ماتریس اندازه‌گیری بدست آمده است. این موضوع، نکته‌ای مهم در بازسازی سیگنال‌های تنک در سایه سنجش فشرده می‌باشد. به منظور بهینه‌سازی از روش بهینه‌سازی *ADMM* استفاده شده است. همانگونه که نتایج شبیه‌سازی ارائه داده‌اند، روش پیشنهادی نسبت به روش استفاده از دنباله‌های متعامد کارایی مناسبی دارد و در حد 1.5 dB در *NMSE* و 0.5 dB در *BER* کاهش کارایی دارد.

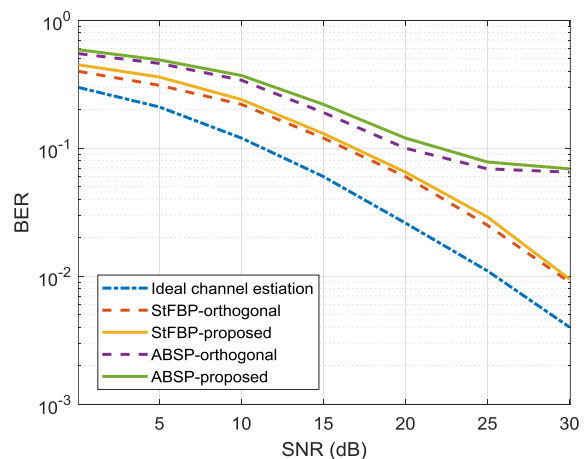
مراجع

- [1] L. Chen, A. Liu, X. Yuan, "Structured turbo compressed sensing for massive MIMO channel estimation using a Markov prior," *IEEE Trans. Veh. Technol.* vol. 67, no. 5, pp. 4635–4639, Jul. 2018.
- [2] P. Cheng, Z. Chen, Y. Rui, Y. J. Guo, L. Gui, M. Tao, Q. T. Zhang, "Channel estimation for OFDM systems over doubly selective channels: A distributed compressive sensing based approach," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 61, no. 10, pp. 4173–4185 Nov. 2013.
- [3] Y. Nan, L. Zhang, and X. Sun, "Efficient downlink channel estimation scheme based on block-0structured compressive sensing for TDD massive MU-MIMO systems," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 4, no. 4, pp. 345–348, Aug. 2015.
- [4] X. He, R. Song, W. P. Zhu, "Pilot allocation for sparse channel estimation in MIMO-OFDM systems," *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs.* vol. 60, no. 9, pp. 612–616, Oct. 2013.
- [5] X. He, R. Song, W. P. Zhu, "Pilot allocation for distributed-compressed-sensing-based sparse channel estimation in MIMO-OFDM systems," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 65, no. 5, pp. 2990–3004, May 2016.
- [6] C. Qi, G. Yue, L. Wu, N. Arumugam, "Pilot design for sparse channel estimation in ofdm-based cognitive radio systems," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 63, no. 2, pp. 982–987, Feb. 2014.
- [7] R. Mohammadian, A. Amini, and B. Hossein Khalaj, "Compressive Sensing-Based Pilot Design for Sparse Channel Estimation in OFDM Systems," *IEEE Communications Letters*, vol. 21, no. 1, pp. 4–7, Jan. 2017.
- [8] A. Waseem, A. Naveed, S. Ali, M. Arshad, H. Anis, and I. M. Qureshi, "Compressive Sensing Based Channel Estimation for Massive MIMO Communication Systems," *Wireless Commun. Mobile Comput.*, vol. 2019, ID 6374764, pp.15.
- [9] X. Chao, Z. Jianhua, and Y. Changchuan, "Non-orthogonal pilot pattern for sparse channel estimation in large-scale MIMO-OFDM system," *The J. of China Univ. of Posts and Telecommun.*, vol. 23, no. 4, pp. 63–68, Aug. 2016.
- [10] D. Lee, "MIMO OFDM channel estimation via block stage-wise orthogonal matching pursuit," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 20, no. 7, pp. 2115–2118, Aug. 2016.
- [11] T. T. Cai and L. Wang, "Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 7, pp. 4680–4688, Aug. 2011.
- [12] Z. Gao, L. Dai, W. Dai, B. Shim, and Z. Wang, "Structured compressive sensing-based spatio-temporal joint channel estimation for FDD massive MIMO," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 64, no. 2, pp. 601–617, Feb. 2016.
- [13] Q. Qin, L. Gui, B. Gong, and S. Luo, "Sparse channel estimation for massive MIMO-OFDM systems over time-varying channels," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 33740–33751, 2018.
- [14] M.F. Duarte, S. Sarvotham, D. Baron, M.B. Wakin, R.G. Baraniuk, "Distributed compressed sensing of jointly sparse signals," in *Proc. Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput.* (IEEE, Pacific Grove, 2005), pp. 1537–1541.

اگر بخواهیم روش پیشنهادی را از دید بهینه‌سازی که در استفاده از منابع ارائه داده است بررسی کنیم، باید توجه داشت که از 1.024 زیرحامل برای ارسال، در حالت متعامد 640 زیر حامل برای پایلوت استفاده می‌شود در حالی که در روش پیشنهادی 20 زیرحامل برای پایلوت استفاده می‌شود. این امر یعنی اینکه بیش از 97 درصد صرفه‌جویی در یک سمبل OFDM برای تخصیص پایلوت صورت می‌گیرد. حال اگر استاندارد LTE را در نظر بگیریم که در هر فریم، 7 سمبل OFDM قرار گرفته و فقط در 2 سمبل آن از پایلوت استفاده می‌شود؛ میزان صرفه‌جویی پایلوت‌ها حدوداً 27% می‌باشد. به عبارتی به اندازه 27% بهره طیفی افزایش خواهد یافت.



شکل ۶: مقدار NMSE بر اساس دنباله‌های تولید شده و دنباله‌های متعامد



شکل ۷: مقدار BER بر اساس دنباله‌های تولید شده و دنباله‌های متعامد

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله روشی برای تولید دنباله‌های پایلوت بهینه پیشنهاد شده است تا اینکه بتوان در سیستم‌های MIMO انبوه از دنباله‌های

- [19] Z. Huang, R. Hu, Y. Guo, E. Chan-Tin, and Y. Gong, "DP-ADMM: ADMM-Based distributed learning with differential privacy," *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, vol. 15, no. 4, pp. 1002–1012, Jul. 2019.
- [20] M. V. Afonso, J. M. Bioucas-Dias, and M. A. T. Figueiredo "Fast Image Recovery Using Variable Splitting and Constrained Optimization," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 19, no. 9, pp. 2345–2356, Sept. 2010.
- [21] A. Akbarpour-Kasgari, M. Ardebilipour, "Massive MIMO-OFDM Channel Estimation via Distributed Compressed Sensing," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 8, no. 2, pp. 376–379, Feb. 2019.
- [22] 3GPP, TS 36.101 (V12.9.0), "User equipment radio transmission and reception (Rel. 12)," Oct. 2015.
- [15] P. Cheng, Z. Chen, Y. Rui, Y.J. Guo, L. Gui, M. Tao, Q.T. Zhang, "Channel estimation for ofdm systems over doubly selective channels: a distributed compressive sensing based approach," *IEEE Trans. Commun.* vol. 61, no. 10, pp. 4173–4185, Oct. 2013.
- [16] L. Xu, K. Niu, Z. He, W. Xu, Z. Zheng, "MIMO channel estimation based on distributed compressed sensing for LTE-advanced," in *Proc. 9th ICICS*. (IEEE, Tainan, 2013), pp. 1–5.
- [17] X. Rao, V. K. N. Lau, "Distributed compressive CSIT estimation and feedback for FDD multi-user massive MIMO systems," *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 62, no. 12, pp. 3261–3271, Dec. 2014.
- [18] T. Zhang, "Adaptive forward-backward greedy algorithm for learning sparse representations," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 7, pp. 4689–4708, Jul. 2011.

زیر نویس ها:

- ⁶ Alternating Direction Method of Multipliers
⁷ Minimum Mean Square Error
⁸ Peak-to-Average Power Ratio
⁹ Extended Pedestrian A

- ¹ massive MIMO
² Joint sparse
³ Distributed Compressed Sensing
⁴ Restricted Isometry Property
⁵ Mutual Coherence