

Journal of Soft Computing and Information Technology (JSCIT)

Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

Journal Homepage: [jscit.nit.ac.ir](http://jscit.nit.ac.ir)

Volume 8, Number 3, Fall 2019, pp. 32-39

Received: 02/18/2019, Revised: 06/14/2019, Accepted: 06/30/2019



## Experimental Analysis of Stress and Strain Using Photoelasticity and Photogrammetry

Ebadat Ghanbari Parmehr

Department of Geomatics, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.

parmehr@nit.ac.ir

Corresponding author's address: Ebadat Ghanbari Parmehr, Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran.

**Abstract-** Measurement and experimental analysis of stress and strain of enforced objects are crucial in the fields of mechanics and civil engineering. The photoelasticity as a conventional method for measurement and analysis suffers from some limitations such as the need for specific transparent material, appropriate equipment and enough experience. In this research, photogrammetry was introduced for the experimental analysis of stress and strain measurement because of its high accuracy, ease and independence to the material of the object. To compare the accuracy of photogrammetry and photoelasticity, a crane hook-shaped object from Araldite epoxy was tested for different enforcement. In each step, in addition to recording the required information for photoelasticity, photos of the object were taken by a digital camera in a fixed position and orientation. The positions of the corresponding points on the object were measured with an accuracy of 0.01 pixel using digital image processing and least square image matching techniques. The measured stress and strain using photoelasticity and photogrammetry were compared with analytical stress and strain measurement method. The results indicated high accuracy for photogrammetry compared to photoelasticity. Therefore, conventional methods for stress and strain measurements can be replaced by photogrammetry.

**Keywords-** Photoelasticity, Photogrammetry, Digital Image Processing, Stress and Strain.



## آنالیز تجربی تنش و کرنش به روش فتوالاستیسیته و فتوگرامتری

عبادت قنبری پرمهر

گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران.

[parmehr@nit.ac.ir](mailto:parmehr@nit.ac.ir)

\* نشانی نویسنده مسئول: عبادت قنبری پرمهر، بابل، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، دانشکده مهندسی عمران.

چکیده- اندازه‌گیری و آنالیز تجربی تنش و کرنش در قطعات تحت بار و سازه‌ها اهمیت بسیاری در حوزه‌های مختلف علوم مهندسی مانند مکانیک و عمران دارد. فتوالاستیسیته به عنوان روشی مرسوم برای اندازه‌گیری تنش و کرنش دارای محدودیت‌هایی است. این محدودیت‌ها شامل نیاز به استفاده از جسم از جنس خاص، تجهیزات تخصصی و تجربه کافی است. در این تحقیق، فتوگرامتری به عنوان روشی دقیق، آسان و مستقل از جنس قطعه برای اندازه‌گیری تنش و کرنش معرفی شده است. برای مقایسه دقت فتوگرامتری و فتوالاستیسیته، قطعه‌ای از جنس اپوکسی آرادیت با شکل قلاب جرثقیل تحت بارگذاری‌های مختلف قرار داده شده و در هر مرحله، علاوه بر ثبت اطلاعات مورد نیاز روش فتوالاستیسیته، عکسبرداری از قطعه با دوربین رقومی با حفظ وضعیت و مکان دوربین انجام شد. با استفاده از تکنیک‌های پردازش تصاویر رقومی و به‌کارگیری روش تناظریابی کمترین مربعات، مختصات نقاط متناظر روی قطعه با دقت ۰.۰۱ پیکسل اندازه‌گیری شده و تغییر طول‌های ناشی از کرنش‌های اصلی در نقطه دلخواه از قطعه محاسبه شدند. نتایج حاصل از فتوگرامتری با مقادیر حاصل از کرنش به دست آمده به روش فتوالاستیسیته و آنالیز تحلیلی کرنش در نقطه مورد نظر مقایسه شدند. مقایسه نتایج حاصل از روش‌های مختلف بیانگر دقت بالای روش پیشنهادی برای اندازه‌گیری کرنش است. از این‌رو، روش فتوگرامتری می‌تواند جایگزین روش‌های مرسوم اندازه‌گیری کرنش و تنش حاصل از بارگذاری شود.

واژه‌های کلیدی: فتوالاستیسیته، فتوگرامتری، پردازش تصویر رقومی، کرنش، تنش.

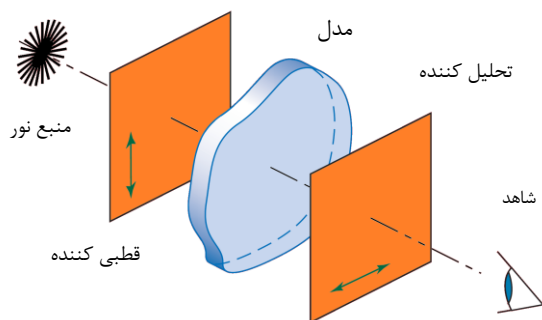
### ۱- مقدمه

کرد که روش‌های غیرتماسی به دلیل سهولت و سرعت زیاد کاربرد بیشتری دارند. در این تحقیق، از فتوگرامتری به عنوان روش اندازه‌گیری غیرتماسی برای اندازه‌گیری کرنش جسم تحت بارگذاری‌های مختلف استفاده شده و نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روش فتوالاستیسیته (روش رایج در اندازه‌گیری تنش و کرنش) مقایسه می‌شود. سپس به منظور صحت سنجی نتایج حاصل از روش فتوگرامتری و فتوالاستیسیته، مقدار کرنش با استفاده از روش تحلیلی محاسبه شده و برای مقایسه نتایج مورد استفاده قرار می‌گیرد و نقاط ضعف و قوت هر یک از روش‌ها در اندازه‌گیری کرنش بررسی می‌شوند.

تحلیل خواص مکانیکی اجسام و قطعات نقش مهمی در طراحی صنعتی و سازه‌های مهندسی و به‌ویژه در آموزش اصول مکانیک مواد در رشته‌های مهندسی مکانیک و عمران دارد. اندازه‌گیری و آنالیز تجربی تنش و کرنش قطعات اطلاعات ارزشمندی درباره خواص مکانیکی اجسام ارائه می‌دهند.

در مکانیک مواد، تنش عبارت از میزان نیروی وارد بر واحد سطح بوده و کرنش در یک نقطه از جسم برابر نسبت تغییر طول جسم به طول اصلی آن بر اثر نیروی وارده است [۱]. از این‌رو، اندازه‌گیری کرنش نیازمند اندازه‌گیری دقیق طول بر روی جسم است. روش‌های اندازه‌گیری طول را می‌توان به روش‌های تماسی و غیرتماسی تقسیم

نقطه درون جسم تشکیل می‌شود که صفحات اصلی تنش نامیده می‌شوند. این صفحات در مواد با خاصیت انکسار مضاعف بر برش‌های اصلی انکسار منطبق هستند [۳-۵].



شکل ۱: ساختار شوماتیک پلاریسکوپ.

مقادیر تنش‌های اصلی در هر نقطه با ضریب شکست ماده در آن نقطه مرتبط است که اساس فتوالاستیسیته را تشکیل می‌دهد. با توجه به اینکه مواد فتوالاستیک دارای ضریب شکست بزرگتر از یک هستند، سرعت انتشار موج نور در آنها در راستای تنش اصلی  $\sigma_1$  بیشتر از سرعت انتشار موج در راستای تنش اصلی  $\sigma_2$  است. این خاصیت به ضریب نسبی تنش - نور معروف بوده و برای هر ماده تا زمانی که در ناحیه الاستیک قرار دارد، مقداری ثابت و مستقل از طول موج نور تابیده شده است. ولی درحالی که جسم از ناحیه الاستیک به پلاستیک تغییر می‌کند، این ضریب به طول موج نور بستگی داشته و این پدیده پاشیدگی فتوالاستیک نامیده می‌شود.

برای مسائل دو بعدی با تنش مسطح که یکی از تنش‌های اصلی صفر است ( $\sigma_3 = 0$ ) قانون تنش-نور برحسب تنش‌های اصلی غیر صفر و برای نوری با تابش نرمال بر سطح مدل به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$\Delta = \frac{2\pi hc}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{nf_\sigma}{h} N/m^2 \quad (2)$$

در روابط فوق  $n = \frac{\Delta}{2\pi}$  (بدون بعد) و نشان‌دهنده تأخیر نسبی برحسب سیکل کامل تأخیر،  $N$  نیوتن و  $m$  متر و  $f_\sigma$  ارزش فرینجی ماده برحسب تنش برای طول موج نور استفاده شده است و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f_\sigma = \frac{\lambda}{c} N/m \quad (3)$$

در اینجا،  $c$  ضریب نسبی تنش - نور و  $\lambda$  طول موج نور است. برای مدلی با ضخامت اندک با استفاده از رابطه (۲) و اندازه‌گیری تأخیر نسبی  $n$  و کالیبراسیون مدل برای یافتن ارزش فرینجی ماده  $f_\sigma$ ، اختلاف تنش‌های اصلی  $\sigma_1 - \sigma_2$  به دست می‌آید. اگر یک مدل

این مقاله شامل چهار بخش است که بخش ۲ به معرفی روش‌های اندازه‌گیری تنش و کرنش پرداخته و اصول علمی هر یک از روش‌ها را به همراه تحقیقات مرتبط شرح داده است. بخش ۳ نتایج حاصل از اندازه‌گیری کرنش به روش‌های مختلف را ارائه می‌کند و در نهایت نتیجه‌گیری تحقیق در بخش ۴ آورده شده است.

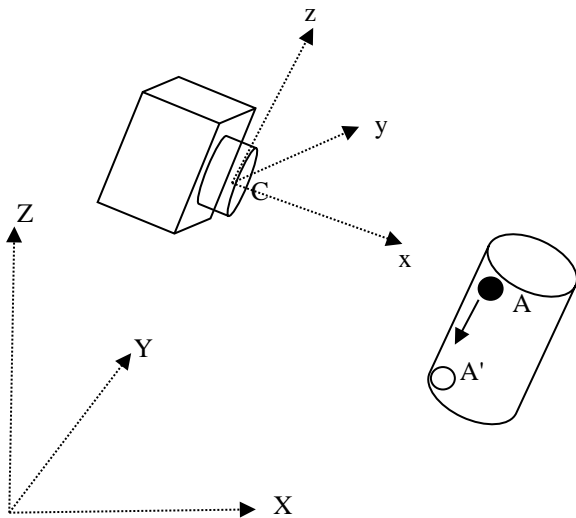
## ۲- اندازه‌گیری تنش و کرنش

به طور کلی روش‌های اندازه‌گیری و آنالیز تنش و کرنش به دو دسته -تحلیلی و تجربی تقسیم می‌شوند. در روش تحلیلی، میزان تنش و کرنش در نقطه مورد نظر از مدل با داشتن میزان نیرو و مشخصات هندسی و فیزیکی جسم تحت بارگذاری قابل محاسبه است. ولی روش‌های تجربی آنالیز تنش و کرنش بر اندازه‌گیری میزان تغییر شکل جسم مبتنی هستند. این تغییر شکل را می‌توان براساس تغییر خواص فیزیکی مانند ضریب شکست نور جسم (اساس فتوالاستیسیته) و یا با استفاده از روش‌های غیرتماسی دیگر مانند فتوگرامتری اندازه‌گیری کرد. در ادامه دو روش فتوالاستیسیته و فتوگرامتری برای اندازه‌گیری کرنش به اختصار شرح داده می‌شوند.

### ۲-۱- روش فتوالاستیسیته

در طی چند دهه اخیر، فتوالاستیسیته به عنوان یک روش تجربی آنالیز تنش و کرنش در کاربردهای متعدد صنعتی [۱] مورد استفاده قرار گرفته است. علاوه بر این، فتوالاستیسیته برای مقاصد آموزش مفاهیم خواص مکانیکی مواد نیز قابل استفاده است [۲]. در این روش، قطعه‌ای شفاف به شکل جسم مورد نظر بریده و آن را تحت بار قرار می‌دهند و با تاباندن نور بر آن و با شمارش فرینج‌های ایجاد شده بر روی آنها مقادیر تنش‌ها و کرنش‌ها را در هر نقطه از سطح مدل به دست می‌آورند. شکل ۱ ساختار شوماتیک یک دستگاه پلاریسکوپ را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده از دو فیلتر قطبی کننده و تحلیل کننده برای قطبی کردن خطی نور استفاده می‌شود که به تشخیص بهتر فرینج‌ها منجر می‌شود. برخی از مواد شفاف غیرکریستالی درحالت غیر مقید (عاری از تنش) از نظر اپتیکی همسان هستند. در نتیجه، وقتی که تحت تنش قرار می‌گیرند، خاصیت غیرهمسانی از نظر اپتیکی پیدا کرده و خواص مواد کریستالی از خود نشان می‌دهند. این خاصیت در حضور نیروی اعمال شده وجود داشته و با حذف نیرو آن خاصیت نیز بصورت آنی یا با توجه به نوع ماده و موقعیت بارگذاری بعد از مدتی از بین خواهد رفت. این پدیده به نام انکسار مضاعف موقت شناخته می‌شود و روش فتوالاستیسیته بر اساس این پدیده فیزیکی مواد غیرکریستالی شفاف بنا شده است. وقتی که جسمی تحت یک میدان تنش سه‌بعدی قرار می‌گیرد، سه صفحه عمود برهم در هر

کاهش دقت اندازه گیری، عکسبرداری با دوربین با قدرت تفکیک بالاتر اجتناب ناپذیر است. همچنین در صورت نیاز به اندازه گیری در امتداد همه محورها، عکسبرداری همزمان توسط چند (حداقل دو) دوربین عکسبرداری و انجام مثلث بندی دسته اشعه ضروری است. شکل ۲ ارتباط بین تغییر شکل جسم بر اثر بارگذاری و تغییر شکل در تصویر اخذ شده را با استفاده از ارتباط فضای تصویر و فضای شی نشان می دهد.



شکل ۲: ارتباط بین فضای شی و فضای تصویر.

با توجه به رابطه برقراری شرط هم خطی برای هر نقطه در فضای شی با مرکز تصویر دوربین و مختصات نقطه متناظر در تصویر، مختصات هر نقطه در یک فضای اختیاری به وسیله تصویر اخذ شده از آن نقطه از طریق معادلات زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} x = -f \frac{M_{1P}}{M_{3P}} \\ y = -f \frac{M_{2P}}{M_{3P}} \end{cases} \quad (10)$$

در رابطه بالا،  $M$  ماتریس کسینوس های هادی برای دوران های دوربین،  $x$  و  $y$  مختصات عکسی نقطه اندازه گیری شده در سیستم مختصات مرکز تصویر دوربین،  $f$  فاصله اصلی دوربین و  $P$  برداری است که با رابطه زیر تعریف می شود:

$$P = \begin{pmatrix} X_A - X_C \\ Y_A - Y_C \\ Z_A - Z_C \end{pmatrix} \quad (11)$$

در این رابطه،  $X_A, \dots, Z_C$  به ترتیب مولفه های کارتزینی مختصات نقطه  $A$  و مرکز تصویر دوربین  $C$  در سیستم مختصات تعیین شده برای فضای شی هستند. حال اگر نقطه  $A$  در فضای شی تحت کشش قرار داده شود، موقعیت هندسی آن جابجا شده و به موقعیت  $A'$  منتقل می شود. در این صورت تصویر نقطه نیز متناسب با این مقدار جابجا شده و به موقعیت  $x'$  و  $y'$  در فضای تصویر منتقل خواهد شد:

فتوالاستیکی رفتار کاملاً خطی از خود نشان دهد، اختلاف کرنش - های اصلی  $\epsilon_1 - \epsilon_2$  را می توان با تعیین مرتبه فرینج  $n$  به دست آورد. رابطه تنش - کرنش برای تنش مسطح یا دو بعدی به قرار زیر است:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad (4)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \quad (5)$$

بنابراین:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6)$$

در روابط فوق،  $\epsilon$ ،  $E$  و  $\nu$  به ترتیب کرنش، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون هستند. با قراردادن نتایج فوق در معادله (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{nf\sigma}{h} = \frac{E}{1+\nu}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (7)$$

$$\frac{nf\epsilon}{h} = \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (8)$$

$$f\epsilon = \frac{1+\nu}{E}f\sigma \quad (9)$$

در رابطه فوق،  $f\epsilon$  ارزش فرینجی ماده بر حسب کرنش است [۳].

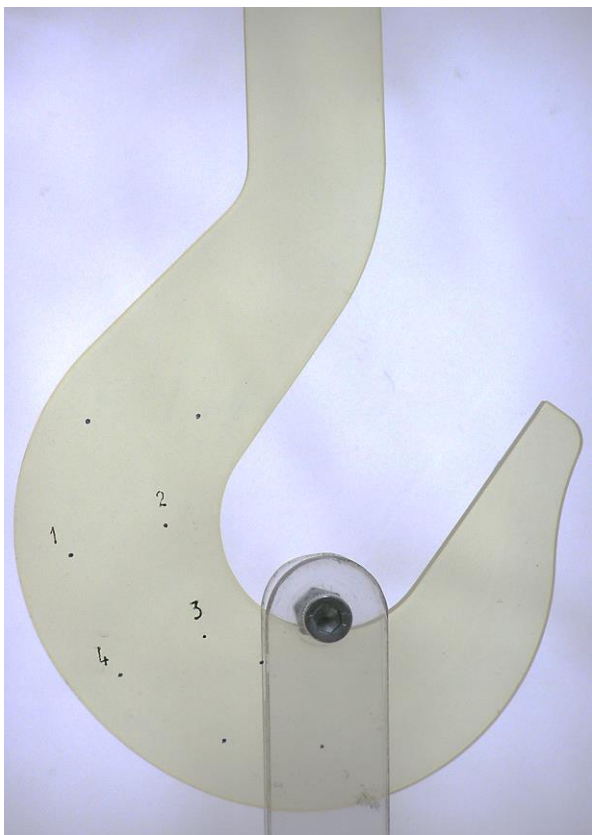
## ۲-۲- روش فتوگرامتری

فتوگرامتری یک روش اندازه گیری نوری غیرتماسی است که با استفاده از اندازه گیری ها بر روی تصویر به اندازه گیری بر روی شی می پردازد [۶]. این روش کاربردهای بسیار متعددی در تهیه نقشه، مدل سازی سه بعدی، صنعت، معماری و به ویژه در اندازه گیری تغییرات ناشی از بارگذاری دارد [۷-۱۰].

اندازه گیری تنش و کرنش با استفاده از روش فتوگرامتری مبتنی بر اندازه گیری تغییر بعد جسم در تصاویر رقومی است. این روش از دو مرحله اصلی اخذ تصویر و پردازش تصویر تشکیل شده است. در مرحله اخذ تصویر، ابتدا در محل های مورد نظر نشانه هایی را بر روی قطعه مورد نظر ایجاد نموده و عکسبرداری از جسم مورد نظر در بارگذاری های مختلف با استفاده از دوربین رقومی صورت می گیرد. سپس در مرحله پردازش تصاویر، اندازه گیری موقعیت نسبی نشانه های ایجاد شده برای اندازه گیری تغییر طول مورد استفاده قرار گرفته و موقعیت دو بعدی یا سه بعدی نقاط مورد نظر در فضای شی محاسبه می شوند.

در این تحقیق، جسم مورد نظر دارای ضخامت ناچیز بوده (۱۰ میلیمتر) و تغییرات حاصل از تنش و کرنش در صفحه قطعه ایجاد می شوند. با ثابت بودن قطعه در یک صفحه و عدم تغییر مکان و وضعیت دوربین، در عکس های متوالی امکان آشکارسازی تغییر شکل های ایجاد شده ناشی از بارگذاری وجود دارد. بنابراین، برای اندازه گیری دو بعدی در فضای شی، عکسبرداری از یک ایستگاه برای آنالیز تنش و کرنش کافی است. البته قابل ذکر است که در صورت بزرگ بودن قطعه، با تغییر مقیاس عکسبرداری می توان کل قطعه را پوشش داد. با توجه به کوچکتر شدن مقیاس و در نتیجه

Olympus C740 با قدرت تفکیک  $1536 \times 2048$  پیکسل در شکل ۳ نشان داده شده است. با وجود مشخص بودن نشانه‌ها، تعیین مختصات نقاط متناظر به صورت دستی دقت کافی نداشته و در بهترین حالت ۰.۵ پیکسل دقت حاصل خواهد شد. برای افزایش دقت اندازه‌گیری مختصات نشانه‌ها می‌توان از روش‌های تناظریابی استفاده کرد. با توجه به تغییر بعد بسیار کم شیء آزمایش شده، اندازه‌گیری دقیق مختصات نقاط نشانه و در نتیجه اندازه‌گیری کرنش ایجاد شده با حداکثر دقت ممکن نیاز است. در میان روش‌های اندازه‌گیری مختصات نقاط نشانه، روش اندازه‌گیری تناظریابی کمترین مربعات دارای دقت و صحت بیشتری است و اندازه‌گیری دستی مختصات نقاط نشانه به عنوان مقادیر اولیه استفاده می‌شود [۱۱].



شکل ۳: قطعه مورد آزمایش به همراه نشانه‌ها.

مراحل اندازه‌گیری مختصات یک نقطه در شکل ۴ نمایش داده شده است. ابتدا نقطه مورد نظر در تصویر اصلی (نقطه آبی در تصویر سمت چپ) انتخاب و متناظر تقریبی آن در عکس سمت راست (نقطه قرمز رنگ) به کمک اپراتور تعیین می‌شود. با استفاده از مقدار اولیه مختصات نقطه متناظر، موقعیت دقیق آن به روش تناظریابی کمترین مربعات محاسبه می‌شود (نقطه سبز رنگ).

$$\begin{cases} x' = -f \frac{M_1 P'}{M_3 P'} \\ y' = -f \frac{M_2 P'}{M_3 X P'} \end{cases} \quad (12)$$

در رابطه بالا بردار  $X'$  با توجه به موقعیت جابجا شده نقطه  $A$  با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$P' = \begin{pmatrix} X_{A'} - X_C \\ Y_{A'} - Y_C \\ Z_{A'} - Z_C \end{pmatrix} \quad (13)$$

که در آن  $A'$  وضعیت جدید نقطه پس از اعمال کشش در فضای شیء است. با مقایسه رابطه ۱۰ و ۱۲ و با توجه به اینکه کلیه المان‌های این معادلات به غیر از  $A$  ثابت هستند، می‌توان نتیجه گرفت که جابجایی مختصات عکسی نقطه تصویر فقط تابعی از جابجایی نقطه در فضای شیء است. به عبارت دیگر، حتی در صورت وجود خطاهای فاحش دوربین از قبیل اعوجاج عدسی، تغییر بعد سنسور دوربین و نظایر آن، این خطاها بصورت تفاضلی یکدیگر را خنثی خواهند کرد. بنابراین، در صورتی که دوربین کاملاً در محل خود ثابت شده باشد و تنها جابجایی در فضای شیء به علت کشش باشد، در این صورت، جابجایی در فضای تصویر صرفاً تابعی از جابجایی در فضای شیء بوده و از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\begin{cases} dx = x - x' \\ dy = y - y' \end{cases} \quad (14)$$

در نتیجه، تفاضل مختصات عکسی نقاط در عکس‌های متوالی مقدار جابجایی نقاط در فضای شیء را مستقل از خطاهای تصویر ارائه می‌دهد و از برآیند مقادیر  $dx$  و  $dy$ ، برای محاسبه میزان جابجایی  $\Delta l$  استفاده می‌شود. با توجه به تعریف کرنش، نسبت تغییر طول به کل طول، می‌توان میزان کرنش را به صورت زیر بیان کرد:

$$s = \frac{\Delta l}{l} \quad (15)$$

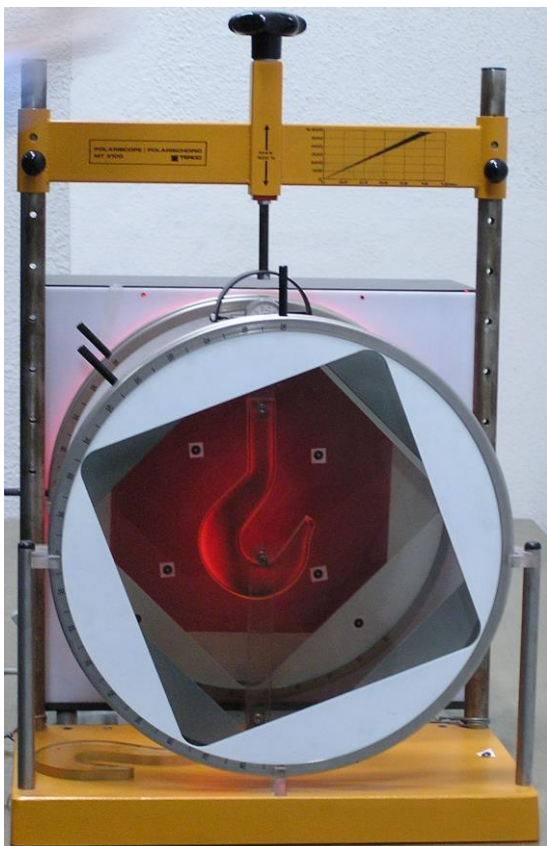
در رابطه فوق،  $\Delta l$  میزان تغییر طول و  $l$  کل طول بین دو نقطه در تصویر است. بدیهی است که واحد طول در این نسبت تأثیری ندارد. با توجه به اینکه اندازه‌گیری در فضای عکس فاقد مشکلات و خطای برقراری ارتباط بین فضای شیء و تصویر است، اندازه‌گیری در فضای تصویر با سهولت انجام می‌شود. علاوه بر این، اندازه‌گیری در فضای تصویر موجب حذف مرحله اندازه‌گیری نقاط کنترل در فضای شیء می‌شود.

با توجه به مقدار کوچک جابجایی در اثر بارگذاری، اندازه‌گیری تغییر طول با دقت زیاد (در حد کسری از پیکسل) ضروری است و اندازه‌گیری دقیق تغییر طول مستلزم وجود نقاط مشخص بر روی شیء است. از این رو، به منظور داشتن بیشترین مقدار کنتراست با رنگ زمینه شیء، نقاط مورد نظر به رنگ سیاه بر روی شیء ایجاد شدند و از این نقاط مشخص شده در اندازه‌گیری میزان تغییر شکل استفاده شد. نمونه‌ای از عکس‌های گرفته شده توسط دوربین رقومی

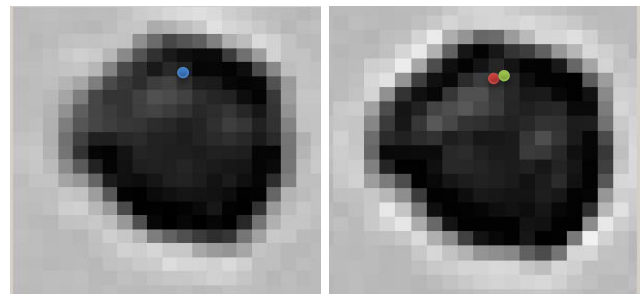
تناظریابی کمترین مربعات نیست. با توجه به مطالب فوق، فقط پارامترهای مختصات در امتداد  $x$  و  $y$  در معادلات تناظریابی کمترین مربعات به عنوان مجهول وارد شدند. این امر موجب کاهش محاسبات، افزایش سرعت همگرایی و مانع از بروز واگرایی‌های احتمالی می‌شود. البته، در صورت وجود تغییر شکل سریع در قطعه، افزایش سرعت عکسبرداری برای ثبت همه تغییرات ضروری است. دوربین‌های عکاسی به طور معمول قادر به عکسبرداری تا ۴ فریم در ثانیه هستند و در صورت نیاز به سرعت بیشتر در ثبت تغییر شکل بایستی از دوربین‌های با سرعت بالا استفاده کرد.

### ۳- نتایج

در این تحقیق از دستگاه پلاریسکوپ مدل MT3100 ساخت کارخانه TERCO استفاده شد (شکل ۵). حداکثر ابعاد نمونه برای پلاریسکوپ موجود ۴۰۰ میلیمتر بوده و منبع نور که در منتهی‌الیه قسمت عقب دستگاه قرار دارد از یک لامپ فلورسان مدور ۳۲ واتی و یک لامپ بخار سدیم تشکیل شده است. لامپ فلورسان نور سفیدی با طول موجهای ۰/۴ تا ۰/۸ میکرون و لامپ بخار سدیم نور تک رنگ قرمز ایجاد می‌نماید.



شکل ۵: دستگاه پلاریسکوپ.



شکل ۴: تصویر نشانه‌های متناظر در دو تصویر متوالی.

در روش تناظریابی کمترین مربعات، با توجه به اندازه نقاط نشانه پنجره‌ای از تصاویر انتخاب شده و با استفاده از روابط ریاضی ارتباط بین تصاویر انتخاب شده برقرار می‌گردد. روابط ریاضی حاکم بر تناظریابی کمترین مربعات به شرح زیر است:

$$r(i, j) = t(i, j) - m(x, y) \quad (16)$$

$$m(x, y) = m[T_G(i, j)] \quad (17)$$

در روابط فوق،  $T_G$  بیانگر میزان جابجایی در امتداد سطر و ستون تصویر است.  $m(x, y)$  متعلق به پنجره تناظریابی در تصویر اصلی،  $t(i, j)$  متعلق به پنجره تبدیل شده و  $r(i, j)$  اختلاف درجات خاکستری بین دو پنجره هستند و مختصات جدید هر نقطه از روابط زیر به دست می‌آید.

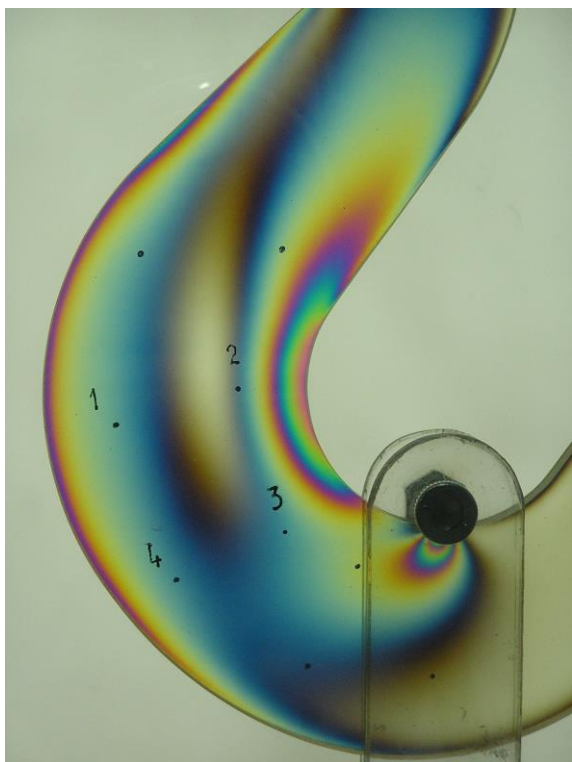
$$x = T_x(x, y) \quad (18)$$

$$y = T_y(x, y) \quad (19)$$

با خطی نمودن  $m(x, y)$  خواهیم داشت:

$$m(x, y) \approx m^0(x, y) + \frac{\partial m(x, y)}{\partial T_x} + \frac{\partial m(x, y)}{\partial T_y} \quad (20)$$

رابطه فوق برای هر یک از پیکسل‌های پنجره نوشته می‌شود و پس از تشکیل دستگاه معادلات براساس روابط خطی شده نسبت به مجهولات مورد نیاز و حل آنها، مختصات دقیق نقاط متناظر به دست می‌آید. با توجه به استفاده از معادلات خطی شده، حل تکراری معادلات تا رسیدن به دقت مورد نظر (۰.۰۱ پیکسل) ادامه می‌یابد. علاوه بر پارامترهای هندسی، می‌توان پارامترهای رادیومتریکی را نیز به عنوان مجهولات در دستگاه معادلات وارد نمود که در صورت وجود تغییر در شرایط نوری و بروز خطای رادیومتریکی قابل استفاده هستند. البته استفاده نامناسب از آنها موجب عدم همگرایی سریع و گاهی مواقع موجب واگرایی می‌شود. از اینرو تا آنجا که ممکن است باید از پارامترهای کمتر استفاده شود [۱۲]. با توجه به جایگاه ثابت دوربین و شیء، تصاویر اخذ شده در بارگذاری‌های مختلف نسبت به یکدیگر دارای اختلافات بسیار جزئی هستند و نیاز به اعمال پارامترهای تغییر شکل در معادلات تناظریابی کمترین مربعات نیست. علاوه بر این، تصویربرداری در فضای آزمایشگاهی و شرایط نوری کنترل شده و یکسان برای تمامی تصاویر انجام شده و در نتیجه نیازی به در نظر گرفتن پارامترهای اختلاف رادیومتریکی در

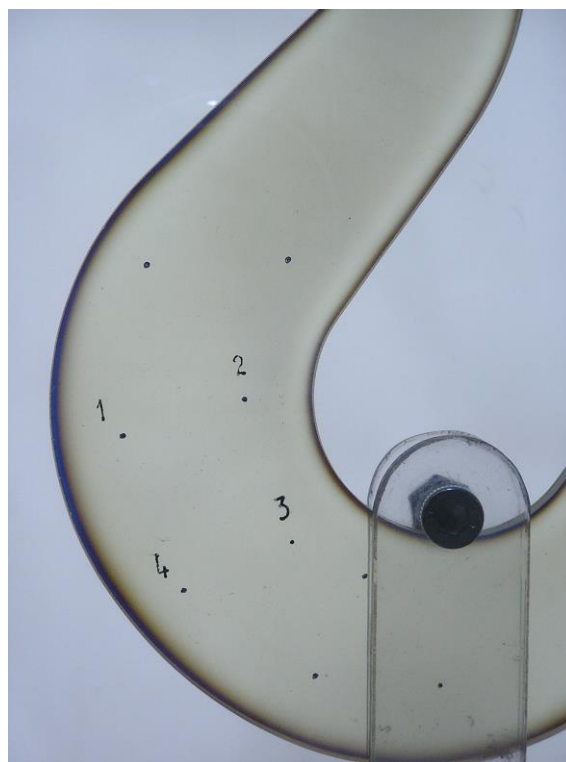


شکل ۷: تصویر مدل با بارگذاری ۲۰۰ نیوتن.

در مدل تحت بارگذاری ۲۰۰ نیوتن به روش فتوالاستیسیته، با توجه به قرار گرفتن نقطه ۲ در نوار آبی سری اول (با ارزش فرینجی ۰.۷۵) کرنش برابر با ۰.۰۰۰۴۵ به دست می‌آید. اما با استفاده از پردازش تصویر و آنالیز تحلیلی، کرنش در نقطه ۲ به ترتیب برابر ۰.۰۰۰۳۹ و ۰.۰۰۰۳۸ محاسبه می‌شود. همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، تمامی نقاط واقع در فرینج‌ها دارای کرنش برابر هستند. به عنوان مثال، میزان کرنش در نقاط ۳ و ۴ براساس روش فتوالاستیسیته ۰.۰۰۰۴۵ است. درحالی‌که، مقادیر کرنش در نقطه ۳ با استفاده از روش‌های پردازش تصویر و آنالیز تحلیلی به ترتیب برابر با ۰.۰۰۰۳۸ و ۰.۰۰۰۳۷ است. به طور مشابه، مقادیر کرنش ۰.۰۰۰۳۷ و ۰.۰۰۰۳۹ برای نقطه ۴ محاسبه می‌شود. شکل ۸ تصویر مدل را تحت بارگذاری‌های ۲۷۵ نیوتن نشان می‌دهد. برای مدل با بارگذاری ۲۷۵ نیوتن به روش فتوالاستیسیته، نقطه ۲ در نوار زرد سری دوم (با ارزش فرینجی ۱.۱۵) قرار گرفته و کرنش برابر با ۰.۰۰۰۶۹ به دست می‌آید. اما با استفاده از پردازش تصویر و آنالیز تحلیلی، کرنش به ترتیب برابر ۰.۰۰۰۵۴ و ۰.۰۰۰۵۲ محاسبه می‌شود. به طور مشابه برای مدل با بارگذاری ۳۷۵ نیوتن به روش فتوالاستیسیته (شکل ۹)، نقطه ۲ در نوار بنفش سری دوم (با ارزش فرینجی ۱.۶) قرار گرفته و کرنش برابر با ۰.۰۰۰۹۶ به دست می‌آید. اما با استفاده از پردازش تصویر و آنالیز تحلیلی، کرنش به ترتیب برابر ۰.۰۰۰۷۳ و ۰.۰۰۰۷۲ محاسبه می‌شود.

در مدل می‌بایست هیچگونه تنش پسماندی وجود نداشته باشد و چنانچه مدل با سرعت برشی زیادی تهیه شده باشد، تنش‌های اولیه در مدل باقی خواهد ماند. همچنین تنش‌های حرارتی به صورت دائم در مدل باقی خواهند ماند که این گونه تنش‌ها دقت آزمایش را کم می‌کند. لازم به ذکر است که نیرو باید به طور یکنواخت به مدل اعمال شده و پس از انجام مشاهدات سریعاً از روی مدل برداشته شود.

در این تحقیق، مدل برش خورده از جنس اپوکسی آردیت با ضخامت ۱۰ میلیمتر به شکل قلاب جرثقیل، با چند نقطه مشخص نشانه‌گذاری شده بر روی آن انتخاب شد. برای پردازش تصویر و محاسبه کرنش‌ها، برنامه‌ای در محیط برنامه‌نویسی Matlab توسعه داده شد. برای بررسی تاثیر بارگذاری بر میزان کرنش و تنش، ابتدا در حالت بدون بار مختصات نقاط و طول خطوط واصل بین نقاط محاسبه شد. سپس مدل مورد نظر تحت بارگذاری‌های مختلف (۲۰۰، ۲۷۵، ۳۰۰، ۳۲۵، ۳۷۵) نیوتن قرار گرفته و تصاویر آن مدل اخذ شد. در نهایت، کرنش‌های اصلی نقطه ۲ از سطح مدل تحت بارگذاری محاسبه شد. شکل ۶ تصویر مدل را بدون بارگذاری نشان می‌دهد که به دلیل عدم وجود تغییر شکل ناشی از بارگذاری، فرینج یا نواری در مدل دیده نمی‌شود. در حالیکه بر اثر تغییر شکل حاصل از بارگذاری در مدل تحت بارگذاری ۲۰۰ نیوتن (شکل ۷)، فرینج‌های فتوالاستیسیته تشکیل شدند.



شکل ۶: تصویر مدل بدون بارگذاری.

دارای میانگین اختلاف برابر ۳٪ است. درحالیکه، روش فتوالاستیسیته دارای میانگین اختلاف ۳۲٪ با مقدار کرنش به روش تحلیلی می‌باشد. این میزان اختلاف زیاد ناشی از خطای موجود در روش فتوالاستیسیته در مراحل تشخیص شماره و رنگ فرینج و کالیبراسیون سیستم است.

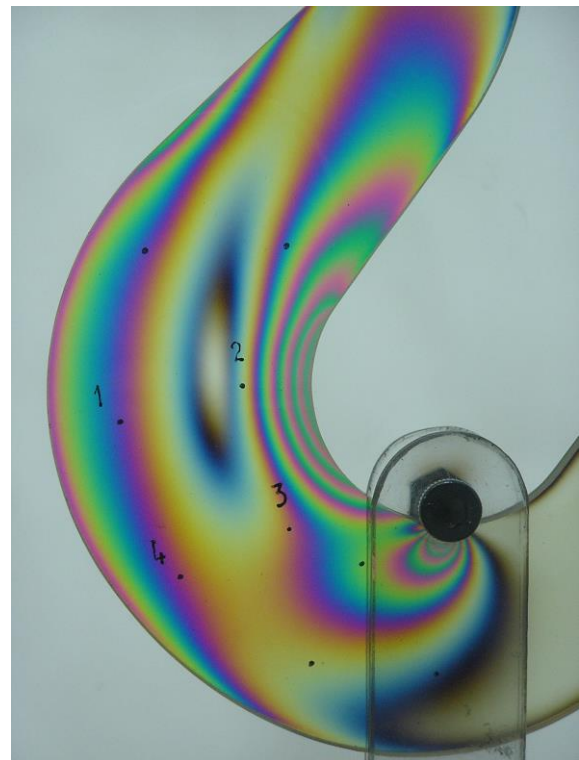
جدول ۱: مقدار کرنش اندازه‌گیری شده در نقطه ۲ مدل با استفاده از روش‌های مختلف.

میزان بارگذاری (نیوتن)	کرنش در نقطه ۲ از مدل				
	فتوالاستیسیته ( $10^{-3}$ )		فتوگرامتری ( $10^{-3}$ )		روش تحلیلی ( $10^{-3}$ )
۲۰۰	۰.۴۵	٪۱۸	۰.۳۹	٪۲	۰.۳۸
۲۷۵	۰.۶۹	٪۳۲	۰.۵۴	٪۴	۰.۵۲
۳۰۰	۰.۷۸	٪۳۶	۰.۵۵	٪۲	۰.۵۷
۳۲۵	۰.۸۷	٪۴۰	۰.۶۱	٪۲	۰.۶۲
۳۷۵	۰.۹۶	٪۳۵	۰.۷۳	٪۳	۰.۷۱

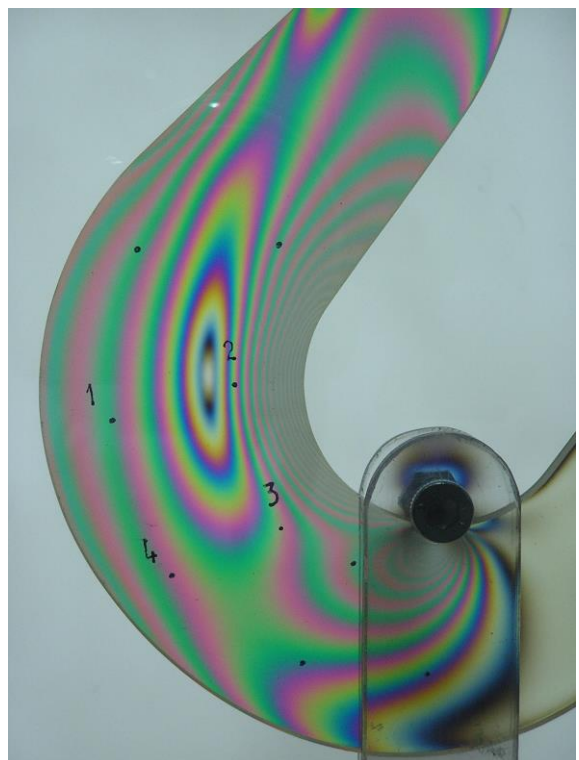
با توجه به نتایج به‌دست آمده، روش فتوگرامتری به عنوان روش کارا و دارای دقت بالا در اندازه‌گیری کرنش شناخته شد. در روش فتوالاستیسیته علاوه بر دقت کمتر، استفاده از دستگاه پلاریسکوپ ضروری است و این روش فقط برای اجسام شفاف کاربرد دارد. از طرف دیگر، روش فتوگرامتری بدون نیاز به دستگاه پلاریسکوپ، محدودیتی از نظر شفافیت و اندازه مدل مورد استفاده ندارد. این امر امکان اندازه‌گیری کرنش و تنش را در سازه‌ها و مدل‌ها با ابعاد واقعی (غیر آزمایشگاهی) را فراهم می‌سازد. از مزایای دیگر روش فتوگرامتری، سرعت بالا و سادگی اندازه‌گیری است که امکان اتوماسیون فرآیند اندازه‌گیری را فراهم می‌سازد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، روش‌های مختلف اندازه‌گیری تنش و کرنش مورد بررسی قرار گرفت. روش فتوالاستیسیته به عنوان روشی متداول در اندازه‌گیری کرنش به همراه مزایا و معایب آن تشریح شد. روش فتوگرامتری به عنوان روشی جدید برای مقابله با محدودیت‌های روش فتوالاستیسیته (مانند نیاز به مدل شفاف، جنس خاص مدل، محدودیت ابعاد و غیره) معرفی شد. هر دو روش در اندازه‌گیری کرنش قطعه آزمایشگاهی مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج حاصل از آنها با مقادیر کرنش به‌دست آمده از آنالیز تحلیلی کرنش مقایسه شدند. مقایسه نتایج حاصل، بیانگر برتری نسبی روش فتوگرامتری به روش فتوالاستیسیته است. میزان اختلاف سه درصدی بین کرنش‌های به‌دست آمده از روش تحلیلی و فتوگرامتری موید دقت بالای روش فتوگرامتری است.



شکل ۸: تصویر مدل با بارگذاری ۲۷۵ نیوتن.



شکل ۹: تصویر مدل با بارگذاری ۳۷۵ نیوتن.

نتایج حاصل از سه روش برای اندازه‌گیری کرنش در نقطه ۲ نمونه تحت بارگذاری‌های مختلف در جدول ۱ آورده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۱، کرنش‌های محاسبه شده به روش فتوگرامتری به مقدار کرنش‌های حاصل از روش تحلیلی نزدیک و



علاوه بر این، روش فتوگرامتری سرعت و سهولت بیشتری نسبت به روش فتوالاستیسیته دارد و نیازمند استفاده از تجهیزات خاص مانند پلاریسکوپ نیست. مهمتر اینکه، امکان اتوماسیون در روش فتوگرامتری باعث شده، اقبال از این روش بیشتر از پیش شده و می‌تواند جایگزین روش‌های قدیمی شود.

### سپاسگزاری

نویسنده مقاله مراتب قدردانی خود را از داوران محترم برای نظرات و پیشنهادات ارزشمندی که به منظور افزایش کیفیت این تحقیق ارائه نمودند و همچنین از حمایت دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل از طریق اعتبار پژوهشی به شماره BNUT/395022/98 اعلام می‌دارد.

### مراجع

- [1] G. Calvert, J. Lesniak, and M. Honlet, "Applications of modern automated photoelasticity to industrial problems," *Insight*, vol. 44, no. 4, pp. 1-4, 2002.
- [2] S. Shakerin and D. D. Jensen, "Enhancement of mechanics education by means of photoelasticity and finite element method," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, vol. 29, no. 4, pp. 307-320, 2001.
- [3] R.G. Budynas, *Advanced strength and applied stress analysis*; McGraw-Hill, 1977.
- [4] J.W. Dally and W.F. Riley, *Experimental stress analysis*. 1965.
- [5] J. Shigley, *Mechanical Engineering Design*. *Mc-Graw Hill Book Co., Singapore* 1972.
- [6] K. B. Atkinson, *Close range photogrammetry and machine vision*. Whittles Publ., 1996.
- [7] A.C. Barcelo, *Structural assessment based on photogrammetry measurements and finite element method*. MS Thesis, Universidade Tecnica de Lisboa, Instituto Superior Tecnico, Lisbon, Portugal, 2012.
- [8] W. Benning, J. Lange, R. Schwermann, C. Effkemann, and S. Görtz, "Monitoring crack origin and evolution at concrete elements using photogrammetry," in *ISPRS Congress Istanbul Commission*, 2004.
- [9] S. Franke, B. Franke, and K. Rautenstrauch, "Strain analysis of wood components by close range photogrammetry," *Materials and structures*, vol. 40, no. 1, pp. 37-46, 2007.
- [10] D. Skarlatos and S. Yiatros, "Deformation monitoring of materials under stress in laboratory experiments," *ISPRS Annals of Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, vol. 3, no. 5, 2016.
- [11] A. Gruen and D. Akca, "Least squares 3D surface and curve matching," *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, vol. 59, no. 3, pp. 151-174, 2005.
- [12] A. Gruen, "Adaptive least squares correlation: a powerful image matching technique," *South African Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Cartography*, vol. 14, no. 3, pp. 175-187, 1985.