

## Study of a malware propagation model in computer networks

Z. Dadi<sup>1\*</sup>, E. Enayati<sup>2\*</sup>

1\*- Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

2- Department of Computer Sciences, Faculty of Basic Sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

<sup>1\*</sup> z.dadi@ub.ac.ir, <sup>2</sup> e.enayati@ub.ac.ir

Corresponding author address: Zohreh Dadi, Faculty Basic Sciences, University of Bojnord, Bojnord, Iran, Post Code: 9453155111.

**Abstract-** In this paper, we present a generalized mathematical model of propagation of malware objects in computer networks which is based on the epidemic modeling of the virus in biological phenomena. In this model, we partition the network computers into five groups: Vulnerable population, Exposed population, Infectious population, Quarantined population, Recovered population. Furthermore, we can model the changes in the status of computers at a malware attack by an ordinary differential equations theory based on the general performance of anti-malware software. A nonlinear differential equation system is proposed for this model, then stability and instability of the computer network (in a malware attack) are investigated by qualitative theories. In addition, we show that in which conditions the computer network has a normal function or a potential disruption when a malware attack occurs. Also, our theoretical results are validated by the aid of numerical simulations which are based on real data of an anti-malware software in a multi-worm attack.

**Keywords-** Malware propagation model, Dynamical modelling, Computer network, Network stability.

## مطالعه یک مدل انتشار بدافزار در شبکه‌های کامپیوتری

زهره دادی<sup>۱\*</sup>، الهام عنایتی<sup>۲</sup>

\* ۱- دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران.

۲- دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران.

<sup>1</sup>z.dadi@ub.ac.ir, <sup>2</sup>e.enayati@ub.ac.ir

\* نشانی نویسنده مسئول: زهره دادی، بجنورد، دانشگاه بجنورد، دانشکده علوم پایه، کدپستی: ۹۴۵۳۱۵۵۱۱۱

چکیده- در این مقاله یک مدل ریاضی تعمیم‌یافته انتشار بدافزار در شبکه‌های کامپیوتری مبتنی بر مدل‌سازی اپیدمی ویروس در پدیده‌های بیولوژیکی ارائه می‌کنیم. در این مدل، ما کامپیوترهای شبکه را به پنج گروه: جمعیت مستعد، جمعیت در معرض خطر، جمعیت آلوده، جمعیت قرنطینه و جمعیت بهبودیافته افراز می‌کنیم. علاوه بر اساس عملکرد عمومی آنتی‌بدافزارها، می‌توانیم تغییر در وضعیت کامپیوترها را در یک حمله بدافزاری به کمک نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی مدل‌سازی می‌کنیم. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی برای این مدل پیشنهاد می‌شود و سپس با استفاده از نظریه‌های کیفی، پایداری و ناپایداری شبکه کامپیوتری (در یک حمله بدافزاری) بررسی می‌شود. به علاوه نشان می‌دهیم در یک حمله بدافزاری تحت چه شرایطی شبکه کامپیوتری دارای عملکرد عادی است و یا احتمال اختلال در عملکرد شبکه کامپیوتری وجود دارد. همچنین به کمک شبیه‌سازی‌های عددی که مبتنی بر داده‌های واقعی عملکرد یک آنتی‌بدافزار در یک حمله چندگرمی بوده است، نتایج تحلیلی ما تصدیق می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: مدل انتشار بدافزار، مدل‌سازی دینامیکی، شبکه‌های کامپیوتری، پایداری شبکه.

### ۱- مقدمه

شرکت‌های بزرگ آنتی ویروس، آنتی اسپم و... روزانه هزاران تهدید امنیتی را کشف و خنثی می‌کنند. شیوه تکثیر و انتشار یک بدافزار (ویروس‌ها، کرم‌ها، تروجان‌ها و...) از بسیاری جهات مشابه با رفتار یک ویروس بیولوژیکی است. تاکنون تحقیقات بسیاری در خصوص مدل‌سازی شیوه انتشار بدافزارهای کامپیوتری با استفاده از مدل انتشار ویروس‌های بیولوژیکی به روش‌های ریاضی انجام شده است [۱] و [۲].

با مدل‌سازی ریاضی مسائل، می‌توان با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی، مکانیزم‌هایی برای فهم بهتر پدیده‌ها ارائه داد. مدل‌سازی ریاضی بدافزارهای کامپیوتری در سه دسته کلی جای می‌گیرند: مدل‌های آماری/مدل‌های قطعی، مدل‌های پیوسته/مدل‌های گسسته، مدل‌های کلی/مدل‌های اختصاصی [۳].

امروزه شبکه‌های کامپیوتری نقش بسیار مهمی در زندگی انسان‌ها ایفا می‌کنند. بسیاری از فعالیت‌های روزانه در بستر خدمات تحت شبکه ارائه می‌شوند و دسترسی به بستر ایمن و آماده ارائه خدمت به یکی از پیش‌نیازهای اساسی جوامع تبدیل شده است. همراه با رشد شبکه‌های کامپیوتری، تهدیدهای مختلف امنیتی نیز برای شبکه‌های کامپیوتری به وجود آمده است. حمله بدافزارها و استفاده از تکنیک‌های آلوده‌سازی که منجر به اختلال در عملکرد شبکه و سرویس‌های آن می‌شوند، تهدیدهای جدی امنیتی در هر شبکه کامپیوتری قلمداد می‌گردند. محققان بسیاری در زمینه شناسایی بدافزارها، شناخت طبیعت و شیوه عملکرد بدافزارها، نحوه انتشار و نیز راهکارهای مقابله با اثرات مخرب آنها مطالعه و تحقیق می‌نمایند.

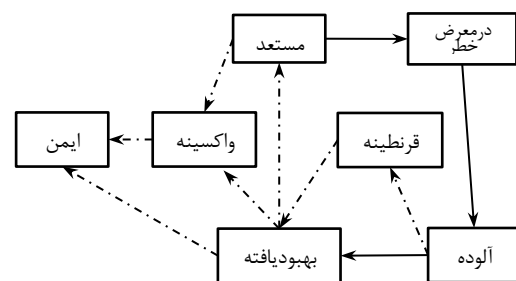
در برخی مدل‌های اولیه [۶] رفتار مدل بسیار ساده و صرفاً مبتنی بر سالم یا ناسالم بودن گره بوده است اما در مدل‌های اخیر میزان این پیچیدگی به نحو قابل قبولی بهبود یافته است. به عنوان مثال مدل SEIQRS در [۱۳] یکی از مدل‌های ریاضی است که در آن تغییر وضعیت گره‌ها به اغلب وضعیت‌های ممکن در یک سیکل طبیعی از آلودگی، پاکسازی و بهبودی گره‌ها در نظر گرفته شده است. با این وجود در این مدل، انتقال از گره با وضعیت در معرض خطر به وضعیت بهبود یافته در نظر گرفته نشده است. این ارتباط در شرایطی است که ممکن است سیستم آلوده شده به بدافزار پیش از فعال شدن کد بدافزار، پاکسازی گردد. همچنین مدل فوق، فاقد انتقال از وضعیت ایمن به وضعیت بهبود یافته می‌باشد. این در حالی است که آنتی‌بدافزار (نرم‌افزار یا سخت‌افزار) در یک شبکه از قبل گره را نسبت به آن بدافزار ایمن کرده باشد و انتقال گره از حالت ایمن به حالت بهبود یافته به صورت مستقیم انجام گردد. در این حالت، گره در معرض آلودگی بوده اما به دلیل وجود سیستم دفاعی قوی و به‌روز، آلوده نشده است و بدافزار با وجود حملات متعدد، اجازه نفوذ پیدا نمی‌کند.

مدل VEISV مدلی است که توسط توتونچی و همکارانش در سال ۲۰۱۲ با ساختار پیچیده‌ای ارائه شده است [۱۲]. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، در این مدل یال‌هایی از گره‌های ایمن و در معرض خطر به گره بهبود یافته در نظر گرفته شده است. اما در این ساختار وضعیت قرنطینه لحاظ نشده است و به طبع آن کلیه یال‌های ارتباطی میان وضعیت قرنطینه و دیگر گره‌ها در ساختار مدل ظاهر نشده است. در حالیکه این وضعیت یکی از وضعیت‌های رایج گره‌های شبکه در برخورد با بدافزارها است و اغلب آنتی‌بدافزارها از آن استفاده می‌نمایند. در [۱۲] نشان داده شده است که اگر نرخ جایگزینی گره آلوده با گره سالم کمتر مساوی یک باشد در این صورت اپیدمی بدافزار در شبکه منقرض می‌شود و در غیر این صورت نفوذ بدافزار ادامه می‌یابد. در این مقاله به بررسی سطح ایمنی مورد نیاز در وضعیت مستعد برای جلوگیری از گسترش آلودگی پرداخته شده است.

نکته قابل تامل دیگر آن است که خروج طبیعی گره‌ها از مدل (مرگ طبیعی) که شامل غیرفعال شدن گره به دلایل غیرحمله بدافزار (خرابی سخت‌افزار، قطعی جریان برق، مشکلات نرم‌افزاری و...) می‌باشد، در این مدل در نظر گرفته نشده است. شکل ۲ را ببینید. در سال ۲۰۱۷ انوکویه و امه [۵] مدلی را معرفی کردند که در آن مولفه واکسینه به عنوان یک مولفه جدید نسبت به مدل‌های [۳] و [۸] و [۹] و [۱۱] و [۱۲] و [۱۴] ارائه گردیده است. به علاوه، آن‌ها مولفه‌های مستعد، در معرض خطر، آلوده، قرنطینه و

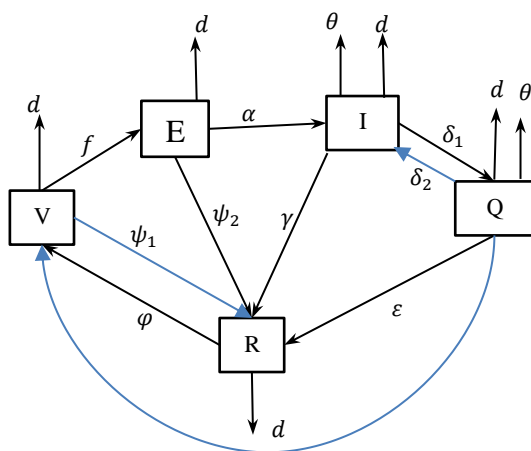
غالباً در یک مدل ریاضی اپیدمی ویروس، جمعیت اولیه به چند دسته تقسیم می‌شود [۲] و [۴]:  
 مستعد (V)؛ کامپیوترهایی که توسط بدافزار آلوده نشده‌اند،  
 در معرض خطر (E)؛ کامپیوترهایی که توسط بدافزار آلوده شده‌اند اما هنوز بدافزار در آنها فعال نشده است،  
 آلوده (I)؛ کامپیوترهایی که بدافزار در آنها فعال شده است بنابراین درست کار نمی‌کنند و قابلیت انتشار بدافزار در شبکه را دارند،  
 قرنطینه (Q)؛ کامپیوترهایی که بدافزار در آنها تشخیص داده شده و از شبکه خارج شده‌اند تا بدافزار آنها حذف شود،  
 بهبود یافته (R)؛ کامپیوترهایی که بدافزار از روی آنها حذف شده است.

در برخی مدل‌های ریاضی اپیدمی ویروس در شبکه‌های کامپیوتری، دسته‌هایی چون سالم<sup>۱</sup>، ایزوله<sup>۲</sup>، واکسینه<sup>۳</sup>، آسیب‌پذیر<sup>۴</sup>، ایمن<sup>۵</sup> نیز استفاده شده است [۵].  
 اولین مدل ریاضی انتشار بدافزارها در شبکه‌های کامپیوتری به روش اپیدمی ویروس، توسط کفر و وایت براساس الگوی SIS (مستعد-آلوده-مستعد) ارائه گردید [۶]. پس از آن مدل‌های مختلف و متنوع دیگری ارائه شد که هر مدل از لحاظ ساختار کلی در دسته‌بندی جمعیت‌ها، نحوه تغییر وضعیت دسته‌ها و برخی جزئیات دیگر تفاوت داشتند. این تفاوت در ساختار مدل‌ها منجر به تفاوت در میزان دقت و واقعی بودن رفتار مدل در محیط‌های عملی می‌شود. از آن میان می‌توان به مدل‌های مطرح شده در [۱۲] - [۷] اشاره کرد که به ترتیب براساس الگوهای SIR، SEIR، SIRS، SIQ، SEIQV، SEIQS ارائه شده‌اند، به عنوان مثال شکل ۱ دیگرام کلی مدل ریاضی انتشار بدافزار در شبکه‌های کامپیوتری با استفاده از روش اپیدمی ویروس را نشان می‌دهد که در [۷] معرفی گردیده است. در این دیگرام هر گره معرف یک دسته معین از جمعیت و یال‌ها معرف نوع ارتباط بین دسته‌هاست.



شکل ۱: دیگرام کلی مدل ریاضی انتشار بدافزار در شبکه‌های کامپیوتری با استفاده از روش اپیدمی ویروس

مدلسازی و نتایج با استفاده از شبیه‌سازی عددی و متد مونت کارلو ارائه شده است. آن چه در این مدل در نظر گرفته نشده است گره‌های قرنطینه، در معرض خطر و بهبود یافته می‌باشد که در بررسی هر مدل انتشار بدافزار حائز اهمیت است و در مقاله پیش رو علاوه بر بررسی دینامیکی یک مدل توسعه یافته شامل همه گره‌های ضروری در مدلسازی پدیده انتشار بدافزار به منظور تایید نتایج تحلیلی به شبیه‌سازی نیز خواهیم پرداخت. هدف از مقاله پیش رو، ارائه مدلی است که در مقایسه با مقالات هم‌ساختار مطرح شده در فوق از ساختار جامع‌تری برخوردار باشد به طوری که شامل تمام گره‌های وضعیت مستعد ( $V$ )، در معرض خطر ( $E$ )، آلوده ( $I$ )، قرنطینه ( $Q$ )، بهبود یافته ( $R$ ) می‌باشد. شکل ۳ را ببینید.



شکل ۳ مدل پیشنهادی VEIQRV

دستگاه معادله دیفرانسیل غیرخطی نظیر به این گراف (شکل ۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -fEV + (-\psi_1 - d)V + \varphi R \\ \frac{dE}{dt} = fEV + (-\alpha - \psi_2 - d)E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E + (-\theta - d - \gamma - \delta_1)I + \delta_2 Q \\ \frac{dQ}{dt} = \delta_1 I + (-d - \theta - \varepsilon - \delta_2)Q \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + \psi_2 E + \psi_1 V + \varepsilon Q - (\varphi + d)R + \mu N \end{cases} \quad (1)$$

که در آن به ترتیب متغیرها و پارامترها معرف مفاهیم زیر هستند:

$V(t)$ : جمعیت گره‌های مستعد

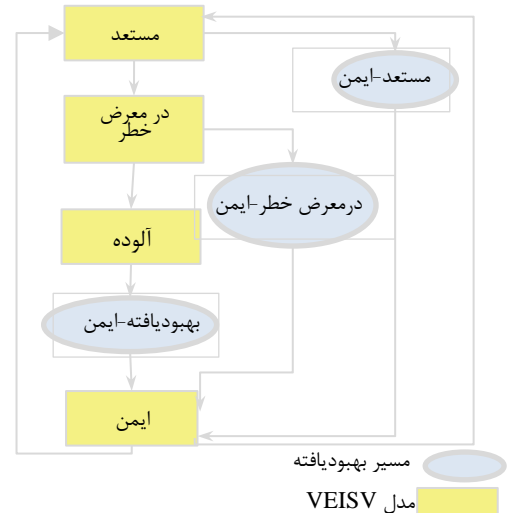
$E(t)$ : جمعیت گره‌های در معرض خطر

$I(t)$ : جمعیت گره‌های آلوده

$Q(t)$ : جمعیت گره‌های قرنطینه شده

$R(t)$ : جمعیت گره‌های بهبود یافته

بهبود یافته را در مدل خود در نظر گرفتند. اما در این مطالعه که از منظر دینامیکی صورت گرفته است مقادیر پارامترها مبتنی بر یک مدل واقعی نبوده‌اند و همچنین از برخی یال‌ها که در تحلیل مدل موثر می‌باشند مانند یال‌های گره قرنطینه به گره آلوده و مستعد، گره مستعد به بهبود یافته و گره در معرض خطر به بهبود یافته



شکل ۲: دیاگرام مدل VESIV

صرفنظر گردیده است. در مطالعه حاضر با افزودن این یال‌ها به بهبود مدل خواهیم پرداخت.

در سال ۲۰۱۷ لیو و ژانگ [۱۴] به مدلسازی شیوع بدافزارهای تحت وب با مولفه‌های مستعد، در معرض خطر، آلوده و بهبود یافته پرداختند و از مولفه‌های قرنطینه و واکسینه در مدلسازی خود صرفنظر کردند. در این تحقیق از روش‌های کنترل بهینه برای بهبود استراتژی‌های کنترل شیوع بدافزارها استفاده شد. با توجه به اهمیت مولفه قرنطینه به عنوان یکی از عملکردهای آنتی بدافزارها در مدلسازی انتشار، ما با افزودن مولفه قرنطینه و یال‌های جدید به مدل مبتنی بر عملکرد آنتی بدافزارها، مدل توسعه یافته‌تری ارائه خواهیم کرد.

علی و همکاران [۱۵] نیز اگر چه در سال ۲۰۱۸ با استفاده از روش عددی پده به مطالعه مدل شیوع ویروس در شبکه‌های کامپیوتری پرداختند ولی در آن مدل مطالعه مولفه قرنطینه مغفول واقع گردیده است.

مطالعات دیگری در خصوص بررسی مدل انتشار آلودگی در شبکه‌های کامپیوتری ویژه انجام شده است. در مطالعه آکارالی و همکاران [۱۶]، محققان به یک مدل گسترش آلودگی در شبکه‌های حسگر بیسیم بر پایه اینترنت اشیاء پرداخته‌اند. با توجه به ماهیت گره‌ها در این نوع شبکه‌ها، مدل IoT-SIS ارائه شده است. این مدل با توجه به خاصیت اینترنت اشیاء و توجه به محدودیت‌های شبکه از نظر توان مصرفی و تراکم گره‌های بیسیم، شیوه انتشار کرم را

## ۱-۲- وجود وضعیت‌های ایستا

دستگاه معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر می‌گیریم. به منظور به دست آوردن دستگاه کاهش یافته متناظر با (۱)، فرض می‌کنیم تعداد سیستم‌های کامپیوتری موجود در شبکه مورد مطالعه در طول دوره زمانی که شبکه مورد بررسی است ثابت می‌ماند یعنی

$$V(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) = N$$

و به عبارت دیگر

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{dE(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0,$$

در نتیجه

$$\mu N = dN + \theta(I + Q).$$

با توجه به کوتاهی دوره زمانی می‌توانیم فرض کنیم  $d \approx 0$  و سپس با فرض برابری نرخ جایگزینی و نرخ اختلال عملکرد<sup>۱۱</sup> یا همان نرخ از کارافتادن در اثر آلودگی، دستگاه (۱) را می‌توانیم به دستگاه زیر کاهش دهیم:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -fEV + (-\psi_1 - d)V + \varphi(N - V - E - I - Q) \\ \frac{dE}{dt} = fEV + (-\alpha - \psi_2 - d)E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E + (-\theta - d - \gamma - \delta_1)I + \delta_2 Q \\ \frac{dQ}{dt} = \delta_1 I + (-d - \theta - \varepsilon - \delta_2)Q. \end{cases} \quad (2)$$

در این مقاله مقادیر پارامترهای مساله بر اساس جدول داده زیر انتخاب شده است که از مرجع [۱۲] انتخاب شده است. در این مرجع مقادیر پارامترها براساس یک سناریوی حمله چندکرمی واقعی با دقت لازم محاسبه شده است که بر مبنای داده‌های شرکت آنتی ویروس پاندا در سال ۲۰۰۹ است. این داده‌ها مبتنی بر بررسی میزبان‌های آلوده شده در آن سال توسط یک کرم خاص بود. با جایگذاری مقادیر جدول ۱، دستگاه (۲) به صورت دستگاه زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -1.6956 \times 10^{-5} EV + (-3 \times 10^{-4})V + 5 \times 10^{-4}(14 \times 10^5 - V - E - I - Q) \\ \frac{dE}{dt} = 1.6956 \times 10^{-5} EV + (-3.086)E \\ \frac{dI}{dt} = 0.286E + (-\theta - \delta_1 - 0.5)I + \delta_2 Q \\ \frac{dQ}{dt} = \delta_1 I + (-\theta - \varepsilon - \delta_2)Q. \end{cases} \quad (3)$$

برای سادگی دستگاه بالا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{X} = F(X) \quad (4)$$

$f$ : نرخ در معرض خطر قرار گرفتن از وضعیت مستعد ( $V \rightarrow E$ )

$\alpha$ : نرخ آلوده شدن از وضعیت در معرض خطر ( $E \rightarrow I$ )

$\psi_1$ : نرخ بهبودی از وضعیت مستعد ( $V \rightarrow R$ )

$d$ : نرخ مرگ طبیعی در هر وضعیتی

$\varphi$ : نرخ مستعد شدن بعد از بهبودی ( $R \rightarrow V$ )

$\psi_2$ : نرخ بهبودی از وضعیت در معرض خطر ( $E \rightarrow R$ )

$\theta$ : نرخ از کار افتادن در اثر آلودگی در هر وضعیتی

$\gamma$ : نرخ بهبودی ( $I \rightarrow R$ )

$\delta_1$ : نرخ قرنطینه شدن از وضعیت آلودگی ( $I \rightarrow Q$ )

$\delta_2$ : نرخ آلوده شدن از وضعیت قرنطینه ( $Q \rightarrow I$ )

$\varepsilon$ : نرخ بهبودی از وضعیت قرنطینه ( $Q \rightarrow R$ )

$\mu$ : نرخ جایگزینی

$N$ : تعداد گره‌های شبکه.

در این مقاله با استفاده از نظریه‌های کیفی در معادلات دیفرانسیل دو وضعیت ایستای عاری از بدافزار و اپیدمی بدافزار را شناسایی خواهیم کرد. این دو وضعیت به ترتیب به معنای عدم وجود گره‌های آلوده در شبکه و وجود گره‌های آلوده در شبکه است که با استفاده از نظریه پایداری به مطالعه پایداری و ناپایداری این دو وضعیت ایستا خواهیم پرداخت. ابتدا نشان خواهیم داد که وضعیت ایستای عاری از بدافزار ناپایدار است و این بدان معناست که در حمله بدافزاری امکان شیوع بدافزار در شبکه قطعاً وجود دارد. همچنین شرایط لازم و کافی برای پایداری و ناپایداری وضعیت ایستای اپیدمی بدافزار را به دست خواهیم آورد که به ترتیب نشان دهنده عملکرد عادی شبکه و احتمال اختلال در عملکرد عادی شبکه می‌باشند. به علاوه به منظور تایید نتایج تحلیلی به دست آمده، شبیه‌سازی‌های عددی این دو وضعیت را ارائه خواهیم داد. در شبیه‌سازی‌های عددی این مدل از پارامترهای مقاله [۱۲] که مبتنی بر داده‌های واقعی عملکرد یک آنتی بدافزار در یک حمله چندکرمی بوده است، استفاده خواهیم کرد.

## ۲- نتایج اصلی

در این بخش دستگاه معادله دیفرانسیل (۱) را با استفاده از یک فرض به دستگاه جدیدی کاهش داده و به بررسی وجود و پایداری وضعیت‌های ایستای (نقاط تعادل) عاری از بدافزار و شیوع بدافزار می‌پردازیم.

جدول ۱ مقادیر پارامترهای مدل VEIQR

پارامتر	$N$	$f$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\varphi$	$\alpha$	$\gamma$	$d$	$\theta, \delta_1, \delta_2, \varepsilon, \mu$
مقدار	$14 \times 10^5$	$1.695 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{-4}$	2.8	$5 \times 10^{-4}$	0.286	0.5	$\approx 0$	نامعین

به طوری که

که این نقطه تعادل را نقطه تعادل عاری از بدافزار می‌نامیم.  
**حالت دوم** اگر  $V^{**} \cong 1.82 \times 10^5$  را در دستگاه زیر جایگزین کنیم

$$\begin{aligned} f_1(V^{**}, E^{**}, I^{**}, Q^{**}) &= 0, \\ f_3(V^{**}, E^{**}, I^{**}, Q^{**}) &= 0, \\ f_4(V^{**}, E^{**}, I^{**}, Q^{**}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3.085492E^{**} - 0.0005(I^{**} + Q^{**}) = 554.4 \\ 0.286E^{**} - \theta_1 I^{**} + \delta_2 Q^{**} = 0 \\ \delta_1 I^{**} - \theta_2 Q^{**} = 0 \end{cases}$$

$$I^{**} = \frac{\theta_2}{\delta_1} Q^{**}$$

که از جایگزینی در دو معادله دیگر و با تعریف پارامترهای زیر

$$A := -5 \times 10^{-4} \left( \frac{\theta_2}{\delta_1} + 1 \right) \quad (۶)$$

$$B := -\frac{\theta_1 \theta_2}{\delta_1} + \delta_2 \quad (۷)$$

$$\Delta := 3.085492B - 0.286A \quad (۸)$$

و با فرض  $\Delta \neq 0$  داریم

$$Q^{**} = \frac{\begin{vmatrix} 3.085492 & 554.4 \\ 0.286 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad E^{**} = \frac{\begin{vmatrix} 554.4 & A \\ 0 & B \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

در نتیجه

$$\begin{cases} E^{**} = \frac{554.4B}{\Delta}, \\ Q^{**} = \frac{-158.5584}{\Delta}, \\ I^{**} = \frac{\theta_2}{\delta_1} Q^{**}. \end{cases}$$

با توجه به اینکه  $V, E, I, Q \geq 0$ ، بنابراین شرط لازم برای وجود

نقطه  $P^{**} = (V^{**}, E^{**}, I^{**}, Q^{**})$  آن است که

$$\Delta = 3.085492B - 0.286A < 0, B < 0.$$

حال با توجه به مثبت بودن پارامترهای دستگاه (۱)، نامساوی زیر

به طور طبیعی برقرار است

$$(\theta + \delta_1 + 0.5)(\theta + \varepsilon + \delta_2) > \delta_1 \delta_2.$$

$$X = (V, E, I, Q), \quad F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

۹

$$f_1(x) = -1.6956 \times 10^{-5}EV + (-3 \times 10^{-4})V + 5 \times 10^{-4}(14 \times 10^5 - V - E - I - Q)$$

$$f_2(x) = 1.6956 \times 10^{-5}EV - 3.086E,$$

$$f_3(x) = -0.286E - \theta_1 I + \delta_2 Q,$$

$$f_4(x) = \delta_1 I - \theta_2 Q,$$

$$\theta_1 = \theta + \delta_1 + 0.5,$$

$$\theta_2 = \theta + \varepsilon + \delta_2.$$

بررسی پایداری دستگاه (۳) مستلزم محاسبه نقاط تعادل آن است،

بنابراین لازم است جواب‌های دستگاه  $F(X)=0$  را محاسبه نماییم.

فرض کنیم  $f_2(V^*, E^*, I^*, Q^*) = 0$  در این صورت

$$E^* = 0$$

یا

$$E^* > 0, \quad V^* \cong 1.820004718 \times 10^5$$

بنابراین

**حالت اول** اگر  $E^* = 0$ ، آن‌گاه از معادلات

$$f_4(V^*, E^*, I^*, Q^*) = f_3(V^*, E^*, I^*, Q^*) = 0$$

دستگاه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} -\theta_1 I^* + \delta_2 Q^* = 0 \\ \delta_1 I^* - \theta_2 Q^* = 0 \end{cases}$$

با فرض  $\det \begin{pmatrix} -\theta_1 & \delta_2 \\ \delta_1 & -\theta_2 \end{pmatrix} \neq 0$  داریم:

$$I^* = Q^* = 0$$

و با جایگذاری مقادیر  $E^* = I^* = Q^* = 0$  در معادله

$$f_1(V^*, E^*, I^*, Q^*) = 0$$

مقدار  $V^*$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$V^* = 8.75 \times 10^5$$

بنابراین

$$P^* = (V^*, E^*, I^*, Q^*) = (87500, 0, 0, 0) \quad (۵)$$

$$J = \begin{pmatrix} -fE - \psi_1 - d - \varphi & -fV - \varphi & -\varphi & -\varphi \\ fE & fV - \alpha - \psi_2 - d & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\theta - d - \gamma - \delta_1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 & -d - \theta - \varepsilon - \delta_2 \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{4 \times 4}. \quad (13)$$

و بنابراین  $B < 0$  و کافی است  $\Delta < 0$  باشد. در این صورت

$$a_1 = 1.6956 \times 10^{-5}(E - V) + \theta_2^* + 3.5868 \quad (20) \quad V^{**} = 1.82 \times 10^5 \quad (9)$$

$$a_2 = a(EV) + \theta_1^* \quad (21) \quad E^{**} = \frac{554.4|B|}{|\Delta|} \quad (10)$$

$$a_3 = \theta_2^* a(EV) + \theta_1^* (1.6956 \times 10^{-5}(E - V) + 3.0868), \quad (22) \quad I^{**} = \frac{158.5584\theta_2}{|\Delta|\delta_1} \quad (11)$$

$$a_4 = \theta_1^* a(EV) + 2.42471 \times 10^{-9}(\theta_2 + \delta_1)E. \quad (23) \quad Q^{**} = \frac{158.5584}{|\Delta|} \quad (12)$$

این نقطه تعادل را نقطه تعادل شیوع یا اپیدمی بدانیم. به طوری که

$$\theta_1^* = (\theta + 0.5)(\theta + \varepsilon + \delta_2) + \delta_1(\theta + \varepsilon) \quad (24)$$

$$\theta_2^* = \theta_1 + \theta_2 - 0.5 \quad (25)$$

$$a(EV) = 6.546 \times 10^{-5}E - 13.564 \times 10^{-5}V + 24.688 \times 10^{-4} \quad (26)$$

بنابراین به ازای هر یک از نقاط تعادل، با جایگزینی مقادیر  $V, E, I, Q$  در معادلات (۲۰) تا (۲۳) معادله مشخصه نظیر آن نقطه تعیین می‌شود.

**حالت اول** فرض می‌کنیم  $P = P^*$  یعنی

$$V^* = 8.75 \times 10^5, \\ E^* = I^* = Q^* = 0$$

در این صورت

$$P_1(\lambda) = P_{P^*}(\lambda) \\ = \lambda^4 + a_1^* \lambda^3 + a_2^* \lambda^2 + a_3^* \lambda + a_4^*$$

$$a_1^* = -11.2497 + \theta_2^* \quad (27)$$

$$a_2^* = -118.6895312 + \theta_1^* \quad (28)$$

$$a_3^* = -118.6895312\theta_2^* - 11.7497\theta_1^* \quad (29)$$

$$a_4^* = -118.6895312\theta_1^*. \quad (30)$$

با توجه به اینکه کلیه پارامترهای موجود در مدل مثبت فرض شده-اند. بنابراین  $a_4^* \neq 0$  و در نتیجه  $P_1(\lambda)$  دارای ریشه صفر نیست.

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4,$$

به طوری که

$$a_0 = 1 \quad (15)$$

$$a_1 = -\sum_{i=1}^4 a_{ii} \quad (16)$$

$$a_2 = a_{11}a_{22} + a_{33}a_{44} + a_{21}(fV + \varphi) - \delta_1\delta_2 \quad (17)$$

$$a_3 = -(a_{33} + a_{44})(a_{11}a_{22} + a_{21}(fV + \varphi)) - (a_{11} + a_{22})(a_{33}a_{44} - \delta_1\delta_2) + a_{21}\alpha\varphi \quad (18)$$

$$a_4 = (a_{33}a_{44} - \delta_1\delta_2)(a_{11}a_{22} + a_{21}(fV + \varphi)) - a_{21}a_{44}\alpha\varphi + a_{21}\alpha\varphi\delta_1. \quad (19)$$

با جایگذاری مقادیر جدول ۱ در ماتریس ژاکوبی (۱۳)، ماتریس

(۱۴) را خواهیم داشت.

بنابراین

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4$$

$$J = \begin{pmatrix} -1.6956 \times 10^{-5}E - 8 \times 10^{-4} & -1.6956 \times 10^{-5}V - 5 \times 10^{-4} & -5 \times 10^{-4} & -5 \times 10^{-4} \\ 1.6956 \times 10^{-5}E & 1.6956 \times 10^{-5}V - 3.086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.286 & -\theta_1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 & -\theta_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

به وضوح مشاهده می‌شود که  $a_1^{**} > 0$  همچنین داریم:

(الف) اگر  $a_2^{**} > 0$  و فقط اگر

$$\theta_1^* \left( \frac{0.0363}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + 1 \right) > 24.6855 \quad (41)$$

(ب) اگر  $a_3^{**} > 0$  و فقط اگر

$$\theta_1^* \left( \frac{9.4004 \times 10^{-3} \theta_1^*}{\theta_2^* \delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \frac{8.08 \times 10^{-4}}{\theta_2^*} + \frac{0.0363}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} \right) > 24.6855 \quad (42)$$

(ج) اگر  $a_4^{**} > 0$  و فقط اگر

$$\frac{0.0363 \theta_1^* + 1.3442 \times 10^{-6}}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} > 24.6855. \quad (43)$$

بنابراین به ازای  $i = 1, 2, 3, 4$  داریم  $a_i^{**} > 0$  و فقط اگر

$$M_{\theta_1^*}^1 > 24.6855 \quad (44)$$

که

$$M_{\theta_1^*}^1 := \min \left\{ \theta_1^* \left( \frac{0.0363}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + 1 \right), \theta_1^* \left( \frac{9.4004 \times 10^{-3} \theta_1^*}{\theta_2^* \delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \frac{8.08 \times 10^{-4}}{\theta_2^*} + \frac{0.0363}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} \right), \frac{0.0363 \theta_1^* + 1.3442 \times 10^{-6}}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} \right\} \quad (45)$$

همانطور که می‌دانیم برای بررسی پایداری نقطه تعادل  $P^{**}$  اولین شرط، همان مثبت بودن  $a_i^{**}$  به ازای  $i = 1, 2, 3, 4$  می‌باشد که نامساوی (۴۴) آن را تضمین می‌کند.

اینک دو شرط دیگر پایداری نقطه تعادل  $P^{**}$  را بررسی می‌کنیم

$$a_1^{**} a_2^{**} - a_3^{**} > 0, \quad (46)$$

$$a_3^{**} (a_1^{**} a_2^{**} - a_3^{**}) - a_1^{**2} a_4^{**} > 0. \quad (47)$$

نامساوی (۴۶) معادل آن است که معادله درجه دوم زیر برحسب  $\theta_1^*$  مثبت باشد.

$$M_{\theta_1^*}^2 = \frac{0.3412 \times 10^{-3} \theta_1^{*2}}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \theta_1^* \left( \frac{-0.23205 + 0.0363 \theta_2^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + 8.08 \times 10^{-4} \right) + \left[ -23.6854 \theta_2^* + \frac{0.0363(\theta_2^* + 0.5)}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + 0.5 \right] > 0.$$

همچنین نامساوی (۴۷) معادل است با برقراری نامساوی (۴۸) برحسب  $\theta_1^*$ .

از طرفی برای پایداری  $P_1(\lambda)$ ، یا به طور معادل پایدار بودن نقطه تعادل  $P^*$  لازم و کافی است که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} a_i^* > 0 & i = 1, 2, 3, 4 \\ a_1^* a_2^* - a_3^* > 0 \\ a_3^* (a_1^* a_2^* - a_3^*) - a_1^{*2} a_4^* > 0. \end{cases}$$

با توجه به مثبت بودن پارامترها داریم  $a_2^* > 0$  و  $a_3^* > 0$  یعنی نقطه تعادل  $P^*$  هیچ‌گاه پایدار نخواهد بود. این بدان معناست که در بررسی وضعیت شبکه ای با شرایط اولیه ای به فرم زیر

$$V(t_0) \neq 0; \quad E(t_0) \neq 0; \quad I(t_0) \neq 0; \quad Q(t_0) \neq 0$$

با توجه به ناپایداری همیشگی نقطه تعادل عاری از بدافزار، مطمئن خواهیم بود که حدود زیر برقرارند:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) \neq 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) \neq 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \neq 0, \end{cases} \quad (31)$$

و این به معنای عدم امکان پاکسازی کامل در شبکه با این آنتی-بدافزار است.

**حالت دوم)** فرض می‌کنیم  $P = P^{**}$  در این صورت  $V^{**} < V^*$

$$V^{**} = 182000, \quad (32)$$

$$E^{**} = \frac{554.4 \theta_1^*}{|\Delta|}, \quad (33)$$

$$I^{**} = \frac{1158.5584 \theta_2}{|\Delta| \delta_1}, \quad (34)$$

$$Q^{**} = \frac{158.5584}{|\Delta|}. \quad (35)$$

بنابراین معادله مشخصه نظیر به  $P^{**}$  به صورت زیر است:

$$P_2(\lambda) = P_{P^{**}}(\lambda) = \lambda^4 + a_1^{**} \lambda^3 + a_2^{**} \lambda^2 + a_3^{**} \lambda + a_4^{**} \quad (36)$$

به طوری که

$$a_1^{**} \cong \frac{9.4004 \times 10^{-3} \theta_1^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \theta_1 + \theta_2 \quad (37)$$

$$a_2^{**} = \frac{0.0363 \theta_1^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \theta_1^* - 24.6854672, \quad (38)$$

$$a_3^{**} = \theta_2^* \left( -24.6854 + \frac{0.0363 \theta_1^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} \right) + \theta_1^* \left( \frac{9.4004 \times 10^{-3} \theta_1^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + 8.08 \times 10^{-4} \right) \quad (39)$$

$$a_4^{**} = \theta_1^* \left( -24.6854 + \frac{0.00363 \theta_1^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \frac{1.3442 \times 10^{-6}}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} \right) \quad (40)$$



جدول ۲: ضرایب پارامترهای معادله مشخصه نظیر به  $P^*$ ,  $P^{**}$  به ازای  $\delta_2 = 0.1, \delta_1 = 0.3, \varepsilon = 0.5, \theta = 0.2$

	$a^*_1$	$a^*_2$	$a^*_3$	$a^*_4$
$P^*$	-9.9497	-117.91953120000001	-175.21261268	-91.39093902399999
	$a^{**}_1$	$a^{**}_2$	$a^{**}_3$	$a^{**}_4$
$P^{**}$	1.830468471243293	-23.797812046375522	-23.797812046375522	-23.797812046375522

شروع آنالیز، برابر مقادیر زیر است:

$$V[0] = 300000, E[0] = 300, I[0] = 200, Q[0] = 10$$

در شکل ۴ نشان داده شده است.

حالت اول-ب:

نمودار تغییر وضعیت گره‌ها در شرایطی که تعداد گره‌ها در لحظه

شروع آنالیز برابر مقادیر زیر است:

$$V[0] = 900000, E[0] = 30, I[0] = 20, Q[0] = 10$$

در شکل ۵ ارائه شده است.

حالت دوم)

اینک مقادیر پارامترهای حالت اول را با مقادیر زیر جایگزین می-کنیم که در این حالت نیز نرخ قرنطینه شدن از آلودگی بسیار بیشتر از نرخ آلوده شدن از وضعیت قرنطینه است ولی گره‌های قرنطینه با نرخ  $\varepsilon = 1$  در وضعیت بهبود قرار می‌گیرند و نرخ از کارافتادگی گره‌ها اندک است.

$$\delta_1 = 0.9; \delta_2 = 0.000001; \varepsilon = 1; \theta = 0.0001$$

هر دو نقطه تعادل ذکر شده با مقادیر زیر:

$$P^* = (875000, 0, 0, 0)$$

$$P^{**} = (182000, 179.69151, 36.70581, 36.70169)$$

وجود دارند که نقطه  $P^*$  ناپایدار است زیرا شرط مثبت بودن کلیه ضرایب معادله مشخصه آن برقرار نیست ولی نقطه  $P^{**}$  ممکن است پایدار باشد زیرا کلیه ضرایب معادله مشخصه آن مثبت هستند جدول ۳ را ببینید، بنابراین کافی است دو شرط دیگر پایداری برای آن بررسی شود.

با انجام محاسبات مشاهده می‌شود که معادله (۴۶) و (۴۷) به صورت زیر خواهند بود.

$$a^{**}_1 a^{**}_2 - a^{**}_3 = 3.577838535253975 \times 10^7 > 0$$

$$a^{**}_3 (a^{**}_1 a^{**}_2 - a^{**}_3) - a^{**}_1 a^{**}_4 = 8.935825348558867 \times 10^{11} > 0.$$

بنابراین وضعیت ایستای  $P^{**}$  پایدار است، یعنی تعداد گره‌های آلوده در همسایگی از یک مقدار معین باقی خواهد ماند یعنی اختلالی

$$M_{\theta_1}^2 \left[ \frac{9.4004 \times 10^{-3} \theta_1^2}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \theta_1^* (8.08 \times 10^{-4} + \frac{0.0363 \theta_2^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \theta_2^*) \right] - \theta_1^* \left[ \frac{9.4004 \times 10^{-3} \theta_1^*}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} + \theta_2^* \right]^2 \times \left[ -24.6854 + \frac{3.6313442 \times 10^{-2}}{\delta_1 \delta_2 |\Delta|} \right] > 0 \quad (48)$$

۳- شبیه‌سازی

در این بخش به ازای دو دسته مقادیر متفاوت برای ۴ پارامتر نامعین در بخش قبل، نمودارهای تغییر وضعیت‌های متغیرهای مساله را رسم و وضعیت شبکه را تفسیر می‌کنیم.

حالت اول)

مقادیر پارامترهای زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\delta_1 = 0.3; \delta_2 = 0.1; \varepsilon = 0.5; \theta = 0.2$$

در این حالت نرخ قرنطینه شدن از آلودگی بیشتر از نرخ آلوده شدن از حالت قرنطینه است. به علاوه گره‌های قرنطینه با نرخ  $\varepsilon = 0.5$  در وضعیت بهبود قرار می‌گیرند. هر دو نقطه تعادل یا همان وضعیت‌های ایستای مدل که ذکر شده بود با مقادیر

$$P^* = (V^*, E^*, I^*, Q^*) = (875000, 0, 0, 0)$$

$$P^{**} = (V^{**}, E^{**}, I^{**}, Q^{**}) = (128000, 179.69151, 53.39405, 20.02276)$$

وجود دارند که هر دو نقطه ناپایدار هستند زیرا شرط مثبت بودن کلیه ضرایب معادله مشخصه آنها برقرار نیست، جدول ۲ را ببینید. نمودارهای شکل ۴ و ۵ بیانگر ناپایداری شبکه در این شرایط است زیرا پس از کاهش سریع تعداد گره‌های مستعد با گذر زمان تعداد آنها با سرعت بسیار پایینی افزایش می‌یابد ولی مجدد نیز کاهش خواهد یافت. به علاوه تعداد گره‌های در معرض خطر، آلوده و قرنطینه نیز با تغییرات متعددی روبرو است. در ادامه با دو شرط اولیه متفاوت در نزدیکی نقاط  $P^*$  و  $P^{**}$ ، ناپایداری این نقاط را به کمک شبیه‌سازی نشان خواهیم داد.

حالت اول-الف:

نمودار تغییر وضعیت گره‌ها در شرایطی که تعداد گره‌ها در لحظه

جدول ۳: ضرایب پارامترهای معادله مشخصه نظیر به  $P^*$ ,  $P^{**}$  به ازای  $\delta_2 = 0.000001, \delta_1 = 0.9, \varepsilon = 1, \theta = 0.0001$

	$a_1^*$	$a_2^*$	$a_3^*$	$a_4^*$
$P^*$	-9.449499000000001	-117.4293006899	-228.484093443882	-149.57616844770587
	$a_1^{**}$	$a_2^{**}$	$a_3^{**}$	$a_4^{**}$
$P^{**}$	3049.147299746567	11742.090026969134	24976.74657428154	14800.508814031546

#### ۴- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل تعمیم‌یافته از انتشار بدافزار توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارائه گردید. در این مدل، اکثر مقادیر پارامترها براساس یک سناریوی حمله چندگرمی واقعی انتخاب گردید. سپس به کمک نظریه کیفی در معادلات دیفرانسیل دو وضعیت ایستای عاری از بدافزار و اپیدمی بدافزار در شبکه شناسایی گردید. این وضعیت‌ها در تشخیص عملکرد عادی شبکه و یا احتمال اختلال در عملکرد عادی شبکه مفید واقع گردید. به علاوه در شبیه‌سازی‌های عددی با تغییر در مقادیر برخی از پارامترهای مدل، دو وضعیت متفاوت در عملکرد شبکه؛ عملکرد عادی و عملکرد دارای اختلال مشاهده شد.

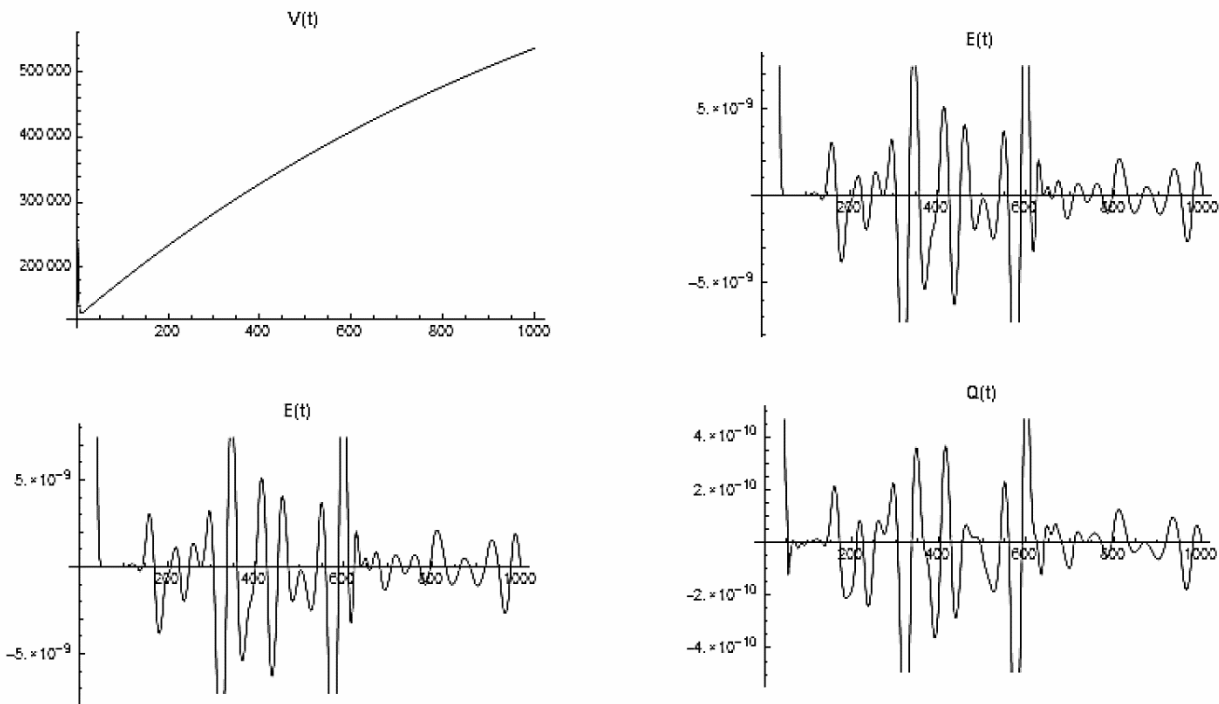
در عملکرد عادی شبکه رخ نداده است. نمودارهای زیر بیانگر ناپایداری وضعیت ایستای  $P^*$  و پایداری وضعیت ایستای  $P^{**}$  از شبکه است. در این حالت نمودار تغییر وضعیت گره‌ها را در شرایطی که تعداد گره‌ها در لحظه شروع آنالیز مقادیر زیر می‌باشند را در نظر می‌گیریم.

$$V[0] = 22 \times 10^5, E[0] = 100, I[0] = Q[0] = 10.$$

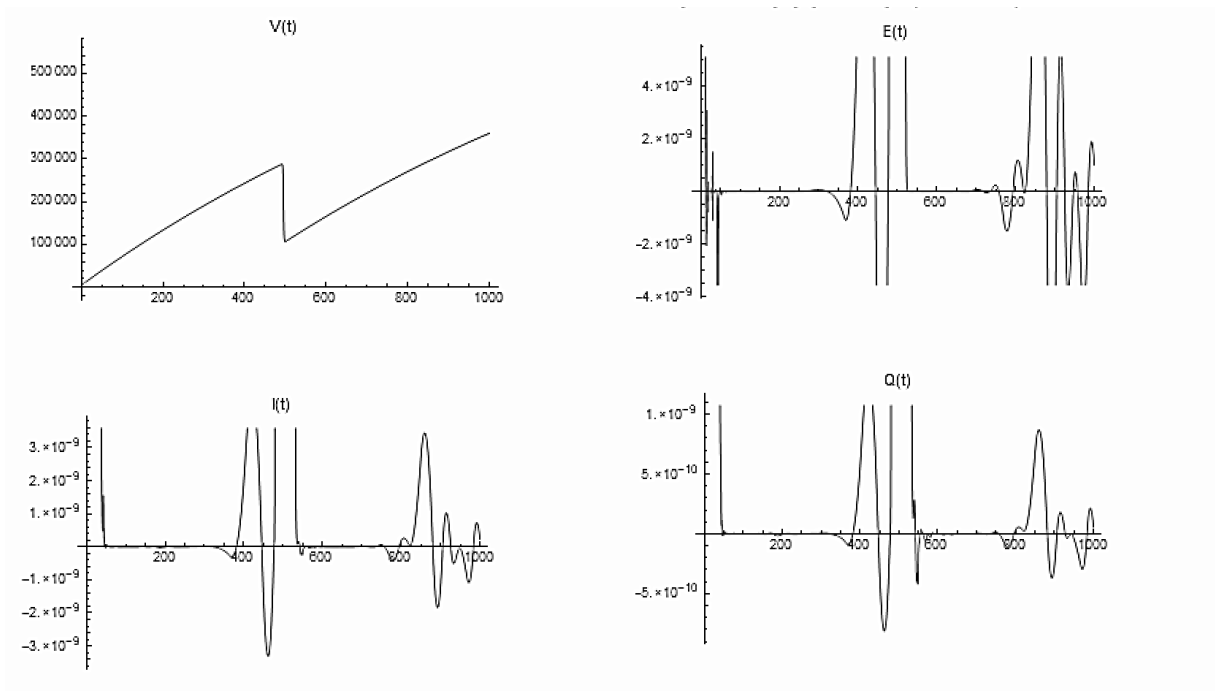
همگرایی به وضعیت ایستای  $P^{**}$  در شکل ۶ مشاهده می‌شود، بنابراین تعداد گره‌های مستعد، در معرض خطر، آلوده و قرنطینه به ترتیب در نزدیکی

$$P^{**} = (182000, 179.69151, 36.70581, 36.70169)$$

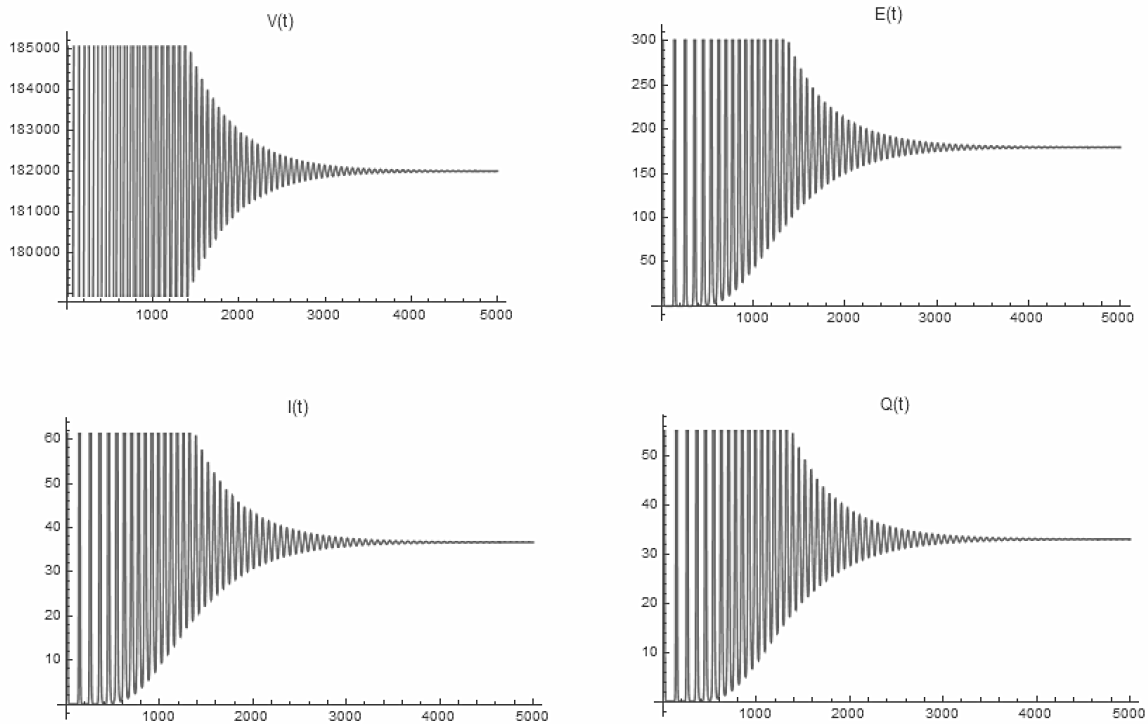
باقی خواهد ماند.



شکل ۴: نمودار تغییر وضعیت گره‌ها حالت اول-الف  $V[0] = 300000, E[0] = 300, I[0] = 200, Q[0] = 10$



شکل ۵: نمودار تغییر وضعیت گره ها حالت اول ب-  $V[0]=900000, E[0]=30, I[0]=20, Q[0]=10$



شکل ۶: نمودار تغییر وضعیت گره ها حالت دوم  $V[0] = 2200000, E[0] = 100, I[0] = 10, Q[0] = 10$

## ۵- مراجع

- [8] H. Zhou, Y. Wen, and H. Zhao, "Modeling and Analysis of Active Benign Worms and Hybrid Benign Worms Containing the Spread of Worms," in *Sixth International Conference on Networking (ICN'07)*, Sainte-Luce, Martinique, France, 2007, pp. 65–65.
- [9] G. Li and Z. Jin, "Global stability of a SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period," *Chaos Solitons Fract.*, vol. 25, no. 5, pp. 1177–1184, Sep. 2005.
- [10] Y. Jin, W. Wang, and S. Xiao, "An SIRS model with a nonlinear incidence rate," *Chaos Solitons Fract.*, vol. 34, no. 5, pp. 1482–1497, Dec. 2007.
- [11] Y. Yao, L. Guo, H. Guo, G. Yu, F. Gao, and X. Tong, "Pulse quarantine strategy of internet worm propagation: Modeling and analysis," *Comput. Electr. Eng.*, vol. 38, no. 5, pp. 1047–1061, Sep. 2012.
- [12] O. A. Toutonji, S.-M. Yoo, and M. Park, "Stability analysis of VEISV propagation modeling for network worm attack," *Appl. Math. Model.*, vol. 36, no. 6, pp. 2751–2761, Jun. 2012.
- [13] B. K. Mishra and N. Jha, "SEIQRS model for the transmission of malicious objects in computer network," *Appl. Math. Model.*, vol. 34, no. 3, pp. 710–715, Mar. 2010.
- [14] W. Liu and S. Zhong, "Web malware spread modelling and optimal control strategies," *Sci. Rep.*, vol. 7, no. 1, p. 42308, Sep. 2017.
- [15] J. Ali, M. Saeed, M. Rafiq, and S. Iqbal, "Numerical treatment of nonlinear model of virus propagation in computer networks: an innovative evolutionary Padé approximation scheme," *Adv. Differ. Equ.*, vol. 2018, no. 1, p. 214, Dec. 2018.
- [16] D. Acarali, M. Rajarajan, N. Komninos, and B. B. Zarpelão, "Modelling the Spread of Botnet Malware in IoT-Based Wireless Sensor Networks," *Secur. Commun. Netw.*, vol. 2019, pp. 1–13, Feb. 2019.
- [1] P. Jia, J. Liu, Y. Fang, L. Liu, and L. Liu, "Modeling and analyzing malware propagation in social networks with heterogeneous infection rates," *Phys. Stat. Mech. Its Appl.*, vol. 507, pp. 240–254, Oct. 2018.
- [2] B. K. Mishra, "Mathematical Model on Attack of Worm and Virus in Computer Network," *Int. J. Future Gener. Commun. Netw.*, vol. 9, no. 6, pp. 245–254, Jun. 2016.
- [3] M. Javidi and N. Nyamorady, "Stability analysis of a novel VEISV propagation model of computer worm attacks," *World Journal of Modelling and Simulation.*, vol. 10, no. 3, p. 12, 2014.
- [4] B. K. Mishra and N. Keshri, "Mathematical model on the transmission of worms in wireless sensor network," *Appl. Math. Model.*, vol. 37, no. 6, pp. 4103–4111, Mar. 2013.
- [5] C. H. Nwokoye and I. I. Umeh, "The SEIQR–V Model: On a More Accurate Analytical Characterization of Malicious Threat Defense," *Int. J. Inf. Technol. Comput. Sci.*, vol. 9, no. 12, pp. 28–37, Dec. 2017.
- [6] J. O. Kephart and S. R. White, "directed-graph epidemiological models of computer viruses," in *IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy*, Oakland, CA, USA, 1991, p. 32.
- [7] A. M. del Rey, "Mathematical modeling of the propagation of malware: a review: Mathematical modeling of the propagation of malware: a review," *Secur. Commun. Netw.*, vol. 8, no. 15, pp. 2561–2579, Oct. 2015.

## زیر نویس‌ها:

- 1 Vulnerable
- 2 Exposed
- 3 Infectious
- 4 Quarantined
- 5 Recovered
- 6 Health
- 7 Isolated
- 8 Vaccinated
- 9 Vulnerable
- 10 Secured
- 11 Dysfunction